
V
B J
C

L'huilier 2e

GEOMETRYA
DLA
SZKÓŁ NARODOWYCH

CZĘŚĆ I.

Drugi ráz wydaná.

2503

... oprawy ... 6.

T. L.



W KRAKOWIE 1785. ROKU

w Drukarni Szkoły Główney Koronney.

Dziéło: *Geometryá*, ułożoné przez J. P. Lhuilier Obywatela Genewéńskiégo, w Towarzystwo Nauk w témże Mieście ustanowioné policzonégo, które za ogłoszoném w Polsce, i obcych kraiach Uczonych do pisaniá wezwaniém, z pomiędzy innych, potwiérdzénié i nagrodę odebrało, od Towarzystwa do Xiąg Eleméntarnych roztrząśnioné, a przez J. X. Gawrońskiégo Kanonika Koadjutora Krakowskiégo, Lektora J. K. Mci i w témże Towarzystwie zasiadaiącégo, na Polski ięzyk z Francuzkiégo przełożoné, Szkołóm Narodowym do użyciá, podług przepisów naszych, podaiémy. W Warszawie dnia 30. Października Roku 1780.



ZBIÓR RZECZY ZAWARTYCH
W ROZDZIAŁACH TEY XIĘGI.

RO-

SŁO-

SŁOWNICZEK GEOMETRYCZNY,

Zamykaiący w sobie słowa nowé, albo mniéy znané, użyté w téy Xiędze, z przydanémi obok słowami Łacińskiémi toż samo w używaniu Matematyków znaczącémi. *

Bezśrzednie	*Immediate.*
Bok	*Latus*. Сторона.
Cécha	*Characteristica*, Характеристика
Célowniki	*Dioptrae*, Приц...
Cienciwa	*Chorda*, Хорда
Czworokąt	*Quadrilaterum*. Четыреугольн...
Dopełnienié	*Complementum*. Прибавка.
Dostawa	*Cosinus*, Косинусъ,
Dosieczná	*Cosecans*. Косекансъ, ...
Dostyczná	*Cotangens*. Котангенсъ.
Dowodzénié	*Demonstratio*. Доказательство
Forémny	*Regularis*. Правильный.
Jlość	*Quantitas*. Количество.
Kąt	*Angulus*. Уголъ.
Kąt ostry	*Angulus acutus*. Уголъ острый
Kąt prosty	*Angulus rectus*. Уг. прямой.

Kąt

---

* W niektórych mieyscach, w wykładzie słów łacińskich na swoyskié nie trzymaliśmy się słownégo tłumaczéniá, ale mieliśmy wzgląd na wyráz i bliższy do dokładnégo rzęczy wystawiéniá, i stósownieyszy do mowy Oyczystéy.

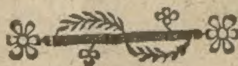
Kąt roſtwarty	*Angulus obtusus*
Kąt wewnętrzny	*Angulus internus*
Kąt zewnętrzny	*Angulus externus*
Kąt wyskakuiący	*Angulus ſaliens*
Kątomiérz	*Graphometrum*
Kąty na przemián	*Anguli alterni*
Kąty przyległé	*Anguli adjacentes*
Kąty przeciwné w wiérzchołku	*Anguli ad verticem oppositi.*
Koło	*Circulus*
Kołowy	*Circularis*
Kwadrat	*Quadratum*
Kwadrat ukośny	*Rhombus*
Kwądrowanié	*Quadratura*
Łuk	*Arcus*
Naſtępnik	*Consequens*
Na odwrot, *albo* odwrotnie	*Inverse* albo *in ratione inversa*
Niespółmierny	*Incommensurabilis*
Obwód	*Perimeter*
Odcinek	*Segmentum.*
Odwrotny	*Inverſus.*
Okrąg	*Circumferentia.*
Opisać	*Inscribere.*
Oś	*Axis*
Oſtrokątny	*Acutangulum*
Pamiętnik	*Memoriale*
Piérwiáſtek	*Radix*
Pięciokąt	*Pentagonum*
Pión	*Perpendiculum*
Pionowy	*Verticalis.*
Podanié	*Propositio*
Podſtawa	*Basis*
Podziáłka	*Scala*

Po-

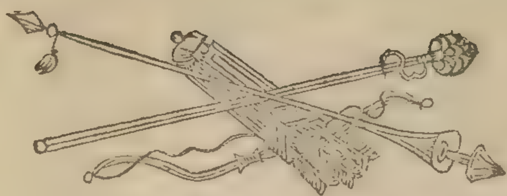
Poprzednik	*Antecedens*
Pośrzednie	*Mediate*
Powierzchniá	*Superficies*
Powietrzniá	*Atmosphera*
Poziémnie	*Horizontaliter*
Poziomy	*Horizontalis*
Prawidło	*Alidada*, albo *Regula*
Promién	*Radius*
Proſtokąt	*Rectangulum*
Proſtokątny	*Rectangulum* n p. *Triangulum*
Proſtokréślny	*Rectilineus*
Prostopadle	*Perpendiculariter*
Proſtopadły	*Perpendicularis*
Przeciwproſtkątná	*Hypothenusa*
Przedmiot	*Obiectum*
Przekątná	*Diagonalis*
Przenośnik	*Transportator*
Przypuszczénié	*Suppositio*
Przystáwanié	*Convenientia*
Ramié kąta	*Crus Anguli*
Rozprawa	*Diſsertatio*
Roztwartokątny	*Obtusangulum*
Równoboczny	*Æquilaterum*
Równoległobok	*Parallelogrammum*
Równoodległá	*Parallela*
Równoodległé	*Parallelae*
Równowága	*Libella*
Równowážénié	*Libellatio*
Różnoboczny	*Scalenum*
Rozwiązanié	*Solutio*
Sieczná	*Secans*
Skrayny	*Extremus*
Spełnienié	*Supplementum*

Spół-

Spółmierny	*Commensurabilis*
Spółśrzodkowy	*Concentricus*
Srzednica	*Diameter*
Srzodek	*Centrum*
Stanowisko	*Statio*
Stolik Geometryczny	*Tabula Praetoriana*
Stopiéń	*Gradus*
Stósunek	*Ratio*
Stósunek dwudzielny	*Ratio ſubduplicata.*
Stósunek dwumno-żny	*Ratio duplicata*
Stósunek ſkładany	*Ratio Composita*
Styczná	*Tangens*
Sześciokąt	*Hexagonum*
Tosamość	*Identitas*
Tróykąt	*Triangulum*
Twiérdzénié	*Theorema*
Twiérdzénié przy-brané	*Lemma*
Ukośny	*Obliquus*
Warunek	*Conditio*
Wiérzchołek	*Vertex*
Wieszadło	*Pendulum*
Wniosek	*Corollarium*
Wpisać	*Inscribere*
Wſtawa	*Sinus*
Wykładnik	*Exponens*
Wyproſtowanié	*Rectificatio*
Zasada	*Principium*
Zagádniénié	*Problema.*



CZĘŚĆ I.



GEOMETRYI

CZĘŚĆ PIÉRWSZA

O Liniiach i powiérzchowniach.

ROZDZIÁŁ I.

Wiadomości począdtkowé o Liniiach prostych, o Obwodzie Kola, i o Kątach.



1. PODRÓŻNY umieiący rachować kroki swoié, potrafi dochodzić iak długá była drogą ta, którą odprawił. Strzelec doświádczéniém i wprawą częstą nauczony, osądzi łatwo, ieżeli strzelba iego do zamiérzonego doniesie célu. Obadwa tak sposobią się do pewnieyszego wyobrażéniá sobie długości i odległości, to iest: do porównaniá ich z temi, które iuż dobrze poznali i wyzna-

czyli. Krok iest taką dlá podróżnégo dł ugo- ścią, a śrzedniá ſtrzelby donośność, słu- ży myśliwému do wymiaru innéy odle- głości.

Té proſté, i inné, im podobné ſposo- by wyobrażéniá ſobie długosci niewiado- mych, użyteczné są w wielu bardzo oko- licznościach życiá; gdzie potrzeba osądzé- niá prętkiégo, innych dokładnieyszych użyć nie pozwálá. A ponieważ przez częsté sposobów takich używanie, uczy- my się chronić tych omyłek, w któreśmy w szczególnych razach wpadać zwykli byli; nie od rzeczy więc będzie wpra- wiać i tak oko uczących się, tyle iednak, ilé to zgodzić się może z publiczną edu- kacyą.

Ale iakiéyżekolwiek w téy mierze ła- twości nabiorą uczniowie przez częsté wprawiania się; chybiać wszelako będą w porównywaniu długości bardzo wiel- kich, lub bardzo małych. Oprócz tego, każdy w szczególności człowiek, używa- iąc sposobu wyżéy wspomnionégo, ró- żnéby iedén od drugiégo czynił wyznaczé- niá iednéyże nawet długości; a zatém tru- dnoby ludzie iedni z drugimi zrozumieć się w téy mierze mogli, gdyby się pier- wszégo tego w wyznaczaniu długości spo- sobu trzymali.

2. Z téy pobudki udano się do ustano- wieniá umówionéy pewnéy długości, kto- rą-

ra na samo weyźrzénié, dokładnie sobie wyobrazić możná było. Do téy stósowano wszystkié inné długości niewiadomé, któré poznać chciano, i dochodzono ich, przykładaiąc wiadomą długość do niewiadomych; długość takowá nazwaná iest *Miarą*.

3. W jednymże kraiu, nie iedna Miara zwykła bydź używaná, według różnych okoliczności, któré się do iéy użyciá zdarzaią. W Polsce na przykład kupieckié niektóré towary, i pomnieyszé na ziémi długości łokciém podzielónym na cále i linie mierzyć się zwykły. Gdy zaś znacznieyszą iaką długość wymiérzać na ziémi trzeba; używámy do tego sążnia z trzech łokci złożonégo, albo prętu zawiéraiącégo 7.½ łokci, a ieszcze lepiéy sznura, który 10. prętów zamyká.

Ponieważ té ostatnié miary nic nie są innégo, tylko łokieć kilka razy przydany; dosyć więc będzie wielkości łokcia dokładné sobie wyobrażénié uczynić, aby dokładnie poznać i wielkość miár większych od łokcia. Wszystkié té słowa: *Sznur*, *Pręt*, *Sążeń*, *Łokieć* i t. d. byłyby tylko słowami próżnémi i bez zrozumiéniá, gdybyśmy dokładnégo nié mieli wyobrażeniá, iednéy z tych miary, na przykład łokcia; bo wszystkié nasze wyobrażeniá, któré o wielkościach mámy, są tylko *względnémi* (relativae) iedné do drugich.

4. Kraie różné odmiénnych też miár zażywaią: a co ieszcze w opaczne rozumienié wprowadzić może, miary té lubo odmiénné, iednémże słowém często się wyrážaią. (a) I tak łokieć Litewski iest $\frac{1}{10}$ większy od łokcia Koronnégo; a zatém i inné Litewskié miary, w któré łokieć wchodzi, większé będą od miár Koronnych. Łokieć Francuzki, dwa razy prawie iest od Polskiégo większy. Mila Niemiecká, zawiérá prawié $1.\frac{2}{3}$ mili Francuzkiéy, a mila Angielská trzecią tylko iést Francuzkiéy mili częścią. (Obácz w 3. Częsci Arytmetyki, na karcie. 276.

5. W przypádkach, o których mówiliśmy, na samę tylko wzgląd miało się *długość*, wielkości tych, któreśmy uwážali. W takowym razie mówić się zwykło, że się samémi liniiami zaprzątámy, a w szczególności liniiami *prostémi*, gdy té wyznáczaią odległość, albo naykrótszą drogę od iednégo ich końca do drugiégo. Gdyby zaś w tychże sa-

mych

(a) Matematycy z wielką usilnością szukali miary iednostayné, do ktoréy możnáby było stósować wszystkié inné. Rozumieli oni, iż ią znaleźli w długości *Wieszadla prostégo* (Pendulum simplex) ustawionégo w mieyscu wolném od zawad, i na powietrzu pomiarkowaném; ale ta materyá należy do Fizyki.

mych liniiach báczył kto szczególniey to mieysce, gdzie się liniiá zaczyná, albo gdzie się kończy, lub gdzie iedna drugą przeciná; wtedy mówiłoby się, że się zaprzątá około *Punktu*. (b)

6. Przez iedén punkt możná tylé liniy rzeczą samą, albo przynáymniey myślą poprowadzić, ilé kto zechce. Ale gdy i drugi Punkt ieszcze, w jakiéykolwiek od piérwszégo odległości, będzie wyznaczony, przez który liniiá prostá má przechodzić; w tym razie położénie téyże linii, iuż się wyznaczá; albo, co na iedno wychodzi, wszystkie Liniie prosté, któréby kto przez dwa Punkta dané poprowadził, nie będą tylko iedną i tą samą Liniią. A zatém, gdy dwie Liniie prosté schodzą się, lub przecinaią, nie mogą tylko Punkt iedén mieć spólny. Gdy się mówić będzie w szczególności o wymiérzaniu na ziémi, powiémy tam, iaką ostrożność mieć potrzeba, gdy wyznaczyć i wymiérzyć przychodzi Liniią łączącą dwa Punkta, których odległość iest wielká.

7.

(b) Nie trzeba tych wyrazów mieć za Definicye, ale tylko za szczéré obiaśnićniá i wyłuszczéniá wyobrażéń, które do tych słów zwykliśmy przywięzywać. Im więcéy kto zastánawiá się nad początkami, na których zasadzaią się naszé wiadomości; tym większą postrzégá trudność w jch wyłożéniu.

7. Na papiérze, aby złączyć dwa Punktá przez Liniią prostą, używamy narzędziá, które się nazywá *Liniiałém* (Regula) nie spuszczaiąc się na samą rękę i oko; i przystawiwszy tén Liniiał do dwóch wyznaczonych Punktów, kréślimy piórém, lub ołowkiém Liniią podaną.

Oprócz wymiaru Liniy prostych, przypadá często zatrudniać się położéniém ich, iednych względém drugich.

8. Gdy dwie Liniie, maią Punkt spólny, mogą bydź do siebie nachylone rozmaitémi sposobami. Abyśmy tę wielość położeń ich, iednych względém drugich dobrze poięli; wystáwmy sobie Liniią iednę prostą na stole na przykład wyrytą, i drugą na niéy naprzód położoną, i zupełnie do niey przystaiąca, a potém obrácaiącą się około Punktu wyznaczonégo, któryby tym obudwóm Liniióm był spólny. W takowém obrácaniu się, druga Liniiá odmiénné coraz położéniá i nachyléniá mieć będzie względém piérwszéy. Té rozmaité nachyleniá nazywaią się *Kątami* (Anguli) Punktu, około którégo ta druga Liniiá obrácała się, nazywá się *Wiérzchołkiém kąta*, (Vertex Anguli.) Liniie, które nachyléniem swoiém tén kat czynią, nazwać możná *Ramionami* (po Łacinie zowią takowé Liniie *Crura.*) Pod czas obrácaniá się tey Linii, Punkt którykolwiek

wiek w niéy naznaczony, w jédnakiéy zawsze odległości będzie od tego Punktu, około którégo statecznie się Liniiá obrácá: a zatém i wszystkié Punkta śladu od niéy zostawionégo, iednakowo będą odległé od tego Punktu nie wzruszonégo. Jeżeli obrácaiącá się Liniiá zupełny obrot uczyni, że znowu do piérwszégo położéniá, skąd się obrácać zaczęła, powróci; ślad taki od tegoż samégo Punktu zostawiony, nazywá się *Okręgiém koła*, (Circumferentia Circuli) Własność Okręgu stąd wypływaiącá, iest ta: że każdy w nim znáyduiący się Punkt, w równéy od iednégo Punktu zostaie odległości; a tén Punkt nazywá się *Srzodkiém*. (Centrum.) Odległość śrzodka od którégokolwiek Punktu Okręgu, nazywa się *Promieniem*. (Radius) Część Okręgu, nazywá się *Łukiém* (Arcus), a Liniiá prostá łącząca końce dwa Łuku, nazwać się może *Ciéńciwą*. (Chorda.) Gdy Ciéńciwa ta przechodzi przez śrzodek Okręgu: a zatém dwa razy większá iest od promiéniá, zwać ią będziemy *Śrzednicą* (Diameter.) Dzieli ona okrąg koła, na dwie równé części, któré tém tylko różnią się, że iedna z jednéy, a druga z drugiey strony Śrzednicy iest położoná. (c)

9.

(c) Chcąc na papiérze nakréślić Okrąg koła, którégo śrzodek i promiéń mámy wyznaczony; używámy do tego narzędziá nazwanégo pospolicie *Cyrklém* (Circinus.)

9. Po tych Definicyach, (które obiaśnić należy ręcznem działaniem tego, co wyrażaią) poydźmy do wyłożenia początku kątów, z którego pochodzą.

Jeżeliby Liniiá ruchomá, odprawiła obrotém swoim, połowę, trzecią część, czwartą, piątą i t. d. téy całéy drogi, którą iéy obeyśdź trzeba było, aby do piérwszégo swégo położénia powróciła; Punkt też którykolwiek téy Linii, odprawił tém samém połowę, trzecią cześć, czwártą, piątą okręgu zupełnégo, którýby ta Liniiá zrobiła w koło się obróciwszy. Skąd wyniká, że wiérzchołek kąta obráwszy za śrzodek, i od niego iakimkolwiek promiéniém łuk nakréśliwszy; któryby między ramionami kąta zamykał się; wielkość tego łuku koła względém całégo okręgu, do którégo należy, dá nám poznać wielkość kąta, względém całégo tego mieysca kątowégo (Angularis) któreby iedna z tych dwóch Liniy przeszła, zaczynaiąc się obrácać wtedy, gdy na drugiéy leżała, a nie kończac się obrácać, aż znowu do niéy przystanie. I przeto łuk tén nazwany iest Miarą (d) kąta między dwóma

---

(d) Tén wyraz *Miara* nie kładzie się tu w ściseém rozumiéniu; miara albowiém iakiéy ilości właściwie wziętá, powinna bydź tego gatunku, którégo iest ta ilośc, którá się mierzy: na przykład długość iedna mie-

Jan Xaniewicz

ma ramionami zamkniętégo, a zatém tak łuk tén, iako i kąt, iednakowo się powiększaią, albo zmnieyszaią, toiest: staią się razém podwóynémi, potróynémi i t. d.

10. Stąd się okazuie, że wielkość kąta od długości ramion iego nie zawisła: (uwága to iest, nad którą dobrze zastánowić się potrzeba.)

11. Aby sposobém wygodnym wielkość każdego kąta wyznaczyć przez wielkość łuku między iego ramionami zamkniętégo, którégo promień iest dany; zgodzono się na podzielénié okręgu iakiégożkolwiek na 360. części równych, z których każdá nazywá się *Stopniém* (Gradus.) Przeto ieżeli łuk zamknięty między ramionami kąta, má w sobie 20, 30, 40, i t. d. części takich, iakich okrąg cały má 360; o tym także kącie mówią, że má 20, 30, 40. i t. d. stopniów. (e)

Na

---

rzy się przez długość inną. Łuk zaś koła i kąt, są gatunku różnégo, a zatém łuk koła miarą kąta właściwie wziętą bydź nié może.

(e) W działaniach większéy dokładności wyciągaiących, dzielą ieszcze każdy stopień na 60. części nazwanych *Minutami*, a każdą minutę na 60. minut *drugich* (Minuta secunda, *albo iednêm słowêm*, secunda.)

Znak stopniów, iest: o nad liczbą stopniów napisané. o o o o

Tak n. p. 20, 21, 30, 31, i t. d. wymáwiá się: dwadzieścia, dwadzieścia iedén i t. d. stopniów.

Na tym gruncie zasadzá się cała robota i używanie narzędziów zdatnych do mierzénia kątów na ziémi, i sposób robiénia tychże kątów na papierze, któreby iakążkolwiek stopniów podaną liczbę zawiérały. *O narzędziach tych mówić potém będziémy.*

Dlá uniknienia długości, którąby obszérne każdego działania wykładanie za sobą pociągało, i aby natężeniu myśli pofolgować, zgodzili się Matematycy na pewné nazwiska Punktów, Liniiów, Kątów i t. d. około których maią do czynienia.

12. Punkt oznáczaią przez iednę tylko literę, n.p. A.B.C.D. i t. d. gdy położénie tego punktu iest wiadome; a n.p. przez x, y, z, gdy nie wiedzą, ale dopiero szukaią iego położénia.

Do oznaczénia Linii używáią liter, które na dwóch iéy końcach kładą, ieżeli iest wielkości ograniczonéy: ieżeli zaś w wielkości swoiéy nie iest ograniczoná; tedy na niéy dwa punkta stanowią, i przy nich piszą dwie litery, którémi ią mianuią. Tak n.p. Liniiá łączącá dwa punkta A i B oznaczona byłaby
Táb. I. *Fig. 1.* témi dwiema złączonémi literami AB.

Dlá oznáczénia kąta (ponieważ tén czynią dwie Liniie do siebie się nachylaiącé)

iace) kładą trzy litery iednę przy wiérzchołku kąta, drugą i trzecią przy końcu ramion tego kąta: a złączywszy ie razém, i w śrzodku ich położywszy literę nad wiérzchołkiém kąta napisaną, trzéma témi literami kąt wyrażaią. Tak n.p. kat zrobiony przez dwie Liniie CA. CB. oznaczyliby iednym z tych dwóch wyrazém: ACB. albo BCA. Gdy wiérzchołek nie należy do więcéy iak do iednégo kąta, dosyć będzie oznaczyć kąt tą iedną literą, która iest nad wiérzchołkiém iego. Táb. I. *Fig.* 2.

13. Kiedy ramié ruchomé przez obrot swóy, którymeśmy początek kątów obiaśnili, uchodzi tylko czwártą część całégo okręgu; zrobi takim obrotém swoim dwa kąty równé z tą Liniią, około któréy się obrácá, gdy tę drugą daléy pociągniémy. Té kąty nazywaią się *Prostémi* (Anguli recti), łuk koła, który im za miarę służy, będzie miál w sobie 90. stopni, sama zaś Liniiá ruchomá, będzie w tén czas *Prostopadłą* (perpendicularis) względém drugiéy. (Obácz w piérwszéy części Arytmetyki na karcie 87.) Táb. I. *Fig.* 3.

Gdy to ſamo ramié ruchomé obrotém swoim nie dochodzi czwártéy części okręgu; wtedy kąty między nim i drugiém ramiéniém przedłużonem uczynioné, będą nie równé. Jedén mnieyszy będzie od

pro-

prostégo, a drugi większy. Té dwa kąty nazwané są *Przyległémi* (Adjacentes), albo (deinceps positi.) Mnieyszy od prostégo zowié się *Ostrym* (acutus) większy zas od prostego, *Roztwartym* (obtusus) a iedna z tych Liniia nazywá się *Pochyłą* (obliqva) do drugiéy. Kąty DCA. DCB.
Táb. I. *Fig. 4.* są nie równé kąt DCB. iest ostry, a kąt DCA. roztwarty, Liniia DC. pochyłá do Linii AB.

14. *Summa dwóch kątów przyległych, równá się dwóm kątóm prostym.*

Niech będzie DC. pochyłá do AB. summa kątów: DCB. DCA. równá iest dwóm kątóm prostym.

Jakoż, gdyby Liniiá DC. zrobiwszy obrotém swoim około Punktu C. kąt BCD, daléy się ieszcze obrácała, ażby naostatek przystała do linii CA; byłaby obrotém; takim przeszła dwa kąty prosté, ale téż razém byłaby przeszła i kąty BCD, i DCA; więc té dwa kąty są dwiéma częściami summy z dwóch kątów prostych złożonéy, a zatém równaią się dwóm kątóm prostym.

15. Gdyby Liniiá CD, była pociągnioná na drugą stronę linii AB, naprzykład aż do E; kąty BCD, ACE, nazywałyby się, ieden względém drugiego *Przeciwległémi w wiérzchołku* (ad Verticem oppositi)

siti) : maią oné wiérzchołek C. spólny, a ramiona CA, CE, iednégo z tych kątów, są przedłużeniem ramión CB, DC, drugiégo.

16. *Kąty w wiérzchołku przeciwległé są równé.*

Jakož w saméy rzeczy kąty: BCD, ACE, mogą bydź uważané, iak gdyby się zrobiły z obracania się Linii ED, około Punktu niewzruszonégo C, zaczynaiac tén obrot, gdy Liniia ED, na Linii AB, leżała, aż do położénia iéy na CE. Tym sposobem Liniia ED, przez taki swóy obrot nachyli się do Linii AB, równie z jednéy iak i z drugiéy strony, a zatém czyni równé kąty DCB, ECA.

Wszystkié té *Podania* (Propositiones) któréśmy dotąd przytoczyli, powinny bydź obiaśnioné, wykonywaiąc ié, przez działania ręczné, na których się zasádzaią. (f) RO-

---

(f) Niech się nie obáwiaią Nauczyciele żádnych zarzutów, gdy przez ruch linii tłumaczyć i obiaśniać będą wielé práwd Geometrycznych Ucznióm swoim dopiéro poczynáiącym. Dalecy oni są ieszcze, aby w téy materyi domyślać się mieli subtelności Metafizycznych. Czynić pod ich oczami działaniá około tych rzeczy, którémi się zatrudniać maią, i zmysły ich na nie obrácać, iest to iedén z náyskuteczznieyszych sposobów, báczność w nich, i uwágę do rzeczy przywiązać, a razém i natężéniu myśli pofolgować.

ROZDZIÁŁ II.

O przystáwaniu Tróykątów, z przystósowaniem do rozwiązaniá wielu Zagádnień.

17. *Definicye*: Mieysce zakończone trzéma Liniiami prostémi, zowie się *Tróykątem prostokréślnym* (Triangulum rectilineum.) My samego przez się słowa *Tróykąt* używac będziemy. Liniie trzy, w których się *Tróykąt* zamyká, zowiémy *Bokami* Tróykata (Latera Trianguli.) Takié Liniie zowią także *ścianami*. Tego nazwiska do innégo potem znaczeniá użyiémy. *Przystáwanié*, (Convenientia) i przypádanié Figur iednych do drugich, na którém równość dwóch iakich Powiérzchni zakládámy, używané iest często w pospolitych życiá ludzkiégo potrzebach i wygodach. Na obicié na przykład pokoiów, bierzémy tylé płótna, lub innéy iakiéy materyi, ilé wystárczá na przykrycié ścián iego: i wielkość powiérzchni tego obiciá, nie różni się od ścián powiérzchni, które pokrywa tylko tém, że ściany są pod obiciém, á obicié na ścianach. Toż mówić o deskach wystárczaiacych na podłogę, albo o szybach do okién i t. d. Krawcy o to się stáraią, aby tak suknie lub inne odziénia wymierzali, żeby té przystáwały iak náylepiey do tych ciała częsci, które pokrywac maią. Dwie

Xięgi

Xięgi iednakowégo dzieła, dwa obrazy pod iednakowemi wymiarami odmalowané, nie różnią się co do powiérzchni, tylko tém, że nie są iedną rzeczą, ale dwiéma. Miary na zboże, napoie, i t. d. tak się zgadzaią z sobą, że iedna prawie wielość ziarna pewnégo, napełniá korzec iedén, iako i drugi; tylé w jedén garniec, co i w drugi mieści się napoiu i t. d. gdy té miary stósuią się do iednéy ustanowionéy od Zwiérzchności.

18. *Twiérdzénié* (Theorema). Jeżeli w dwóch Tróykątach, dwa boki w jednym, równé są dwóm bokóm drugim, i kąty między témi bokami zawarté równé, trzeci téż bok iednégo, równy będzie trzeciému bokowi drugiégo, i kąty przy tych bokach równych będącé, w jédnym i w drugim Tróykącie będą równé.

Niech będą dwa Tróykąty: ABC, abc, których boki: AC, ac, są równé; boki téż BC, bc, równé i kąty: C, i c, równé. Dowiéśdź trzeba, że i boki: AB, ab, i kąty A, i a, iako téż B, i b, będą równé. Táb. I. *Fig.* 5.

Dowodzénié (Demonstratio.) Wystáwmy sobie Tróykąt: abc, iakoby oderwany (co téż odstrzygszy go, i w rzeczy saméy wykonać można) i przeniesiony na Tróykąt: ABC, w tén sposób, aby położywszy liniią ca, na linii CA, liniiá téż cb, przystała do linii CB, (co dlá równo-

wno-

wności kątów C, i c, nastapić powinno.) Ponieważ liniiá ca, równá iést linii CA; a liniiá cb, linii CB, Punkta a, i b, przypadną na punkta A i B; a zatém i liniie ab, i AB, będą przez té samé punkta zakończoné. Więc té dwie ostatnié liniie przykryią się zupełnie iedna drugą; a zatém będą równé, i zrobią z liniiami ca, CA, cb, CB, kąty równe a, i A, iako téż b, i B.

19. *Uwága.* Dwa Tróykąty cab, CAB, nie różnią się od siebie, tylko przez to, że odmiennè mieysce zastępuią. O takich więc dwóch Tróykątach, a w powszechności i o każdych dwóch figurach, samém tylko położéniém mieysca różniących się mówimy, że do siebie *przystáwać mogą.*

20. *Przystósowanié: Jeżeli w jednym Tróykącie, dwa boki są rowné, będą téż rownę i dwa kąty przy nich leżącé.*

Táb. I. Fig. 6. Niech będzie Tróykąt ABC, którégo boki AC, BC, są równé; kąty też A i B, będą równé.

Wystáwmy sobie, że tén Tróykąt ABC, wybity iest na drugiém mieyscu tak, żeby bok CA, w wybitym Tróykącie, to miał położénié, co bok CB, w Tróykącie piérwszym, a znowu bok CB, aby w drugim, na tey stronie leżał na którey bok CA, w piérwszym: ponieważ kąt C, iest iednakowy w obudwóch tych Tróykątach

kątach, położywszy tedy drugi Tróykąt na pierwszym; bok CB, i CA, Tróykąta wybitégo przystanie zupełnie pierwszy CB, do boku CA, drugi CA, do boku CB, Tróykąta pierwszego, a zatém i Punkta B, i A, należące do Tróykąta wybitego, leżeć będą na punktach A, i B, należących do pierwszégo Tróykąta. Więc drugi Tróykąt przeniesiony na pierwszy, będzie mógł przystać do niego: a przeto kąty B i A, tego Tróykąta równé będą, pierwszy kątowi A, drugi kątowi B, Tróykąta podłożonégo. Aże kąt A, w tym podłożonym Troykącie, iest równy także kątowi A drugiégo Tróykąta; więc kąty A i B, Tróykąta podłożonégo są równé kątowi A, w Tróykącie na nim położonym; a zatém kąty A i B, są sobie równé.

Następuiacé tegóż twiérdzénia dowodzénie, zastanáwiá prawie wszystkich poczynaiących, i wielu iest zdaniá, lubo często zawodnégo, że w zrozumiéniu tego dowodzéniá, daie się poznawać pojętność Ucznia i sposobność do Geometryi.

Niech będzie Tróykąt CAB, którégo boki AC. CB, są równe; kąty CAB, CBA, będą też równé. Tab. I. Fig. 7.

Przygotowanié. Na liniiach CA, CB, prédłużonych, weźmy iakiekolwiek linie równé, naprzykład: AD, BE, i poprowádźmy BD, AE.

Dowodzénié. Ponieważ liniie CA, CB, są równé, a liniie téż AD, BE, wzięté są rowne; więc w Tróykątach: DCB, ECA, gdzie kąt C iest spólny, ramiona CB, i CA, CD, i CE, tego kata równé będą; a zatem te dwa Tróykąty przystać do siebie mogą; (1) a w szczególności liniie AE, BD, i kąty przy D i E, rowné będą.

W Tróykątach: ADB, BEA, boki AD, BE, są równé, dowiodło się téż, że liniie BD, AE, są także równé, i że równé są kąty w tych ramionach zawarté przy D, i E; więc té Tróykąty mogą do siebie przystać: a w szczególności kąty: DAB, EBA, są równé, a zatém i im przyległé: CAB, CBA, będą równé.

21. Gdyby wszystkié trzy boki w Tróykącie były równé; trzy także kąty w nim równéby były.

22. *Definicye.* Gdy w Tróykącie dwa boki są równé: taki Tróykąt zowiémy *Równoramiénnym* (Isosceles albo Aequicrurum.) Gdy w Tróykącie boki trzy będą równé; nazwiémy go *Równobocznym* (aequilaterum.)

Gdy w Tróykącie wszystkié trzy boki nierówné będą, zwać go będziémy *Różnobocznym* (Scalenum.)

23. *Twiérdzénié* 2. Gdy dwa Tróykąty, maią bok iedén równy, i gdy dwa kąty przy tym bóku iednego troykąta, równé są względém dwóch kątów przy boku równym drugiégo Tróykąta; trzeci téż kąt w iednym Tróykącie, równy będzie trzeciemu kątowi w drugim; i dwa inné boki, równé względem siebie będą w obudwóch tych Troykątach.

Niecháy naprzykład w dwóch Tróykątach: ABC, abc, boki AB, ab, i kąty A i a, B i b, będą równé; będzie i kąt C, równy kątowi c: boki AC, ac, i boki także BC, bc, będą równe. Tab. I. Fig. 5.

*Dowodzénié. W*ystáwmy sobie Tróykąt abc, przeniesiony na Tróykąt ABC, i na nim położony, tak, aby Punkt *a*, postawiwszy na Punkcie A, linia ab, równa linii AB, na niéy leżała. Ponieważ kąt *a*, równa się kątowi A, i kąt *b*, kątowi B; linia też *ac*, przystanie do linii AC: a linia bc, do BC; Punkt tedy *c*, musi się znaydować razem i na linii AC, i na linii BC; a zatém znaydować się będzie na ich spólném przecięciu C. Więc Tróykąt abc, zupełnie przystanie do Tróykąta ABC, a przeto linie ac i bc, równé będą liniióm AC, BC, tak, iako i kąt c, równy kątowi C.

24. *Przystósowanié.* Jeżeli w Tróykącie, kąty przy *Podstawie* (*ad basim*) są równé; taki Tróykąt będzie *Równoramien-*

ramiénnym. Dowodzénié tego podobné iest wcale dowodzeniu położonému w przystósowaniu pierwszégo Twiérdzénia (20.) Jeżeli Tróykąt má wszystkié trzy kąty równé, będzie Równobocznym.

25. *Twiérdzénié* 3. Gdy w dwóch Tróykątach, boki trzy iednégo, równé są trzem bokóm drugiégo; i katy téż trzy w iednym, będą równé trzem kątóm w drugim, a té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie.

Táb. II. *Fig. 1. i 2.* Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, takié, aby bok AB, w pierwszym równy był bokowi ab, w drugim, podobnie iak i boki AC, BC, równé bokóm ac, bc, té dwa Troykąty mogą przystać do siebie.

Dowodzénié Wystáwmy sobie Tróykąt abc, przeniesiony i położony pod Tróykątem ABC, tak, iak go wyrážá na figurze Tróykąt ABD. Poprowádźmy liniią CD. Ponieważ liniie CB, BD, są obiedwie równé linii cb, są téż i sobie równé; więc i katy: BCD, BDC, są równé (23.) Podobnie kąty ACD, ADC, są także równé: a zatem i kąty: ACB, ADB, równé będą.

Więc dwa Tróykaty: ACB, ADB, mogą przystać do siebie. Ale że téż Tróykąty: ABD, i abc, przystać do siebie

bic mogą; więc przystaną także i Tróykąty: ABC, abc.

26. *Uwága.* Położénié linii CD, może bydź troiakié, bo może albo przecinać liniią AB, między punktami A i B, albo może przez który z tych dwóch punktów przechodzić, albo nawet i przez przedłużénié téyże linii AB. Dowodzenié toż samo iest we wszystkich trzech razach.

27. *Zagádniénié.* (Problema.) Maiac dané dwa Punkta, znaleźć trzeci, któryby od każdégo z tamtych, w jednakowéy był odległości.

Rozwiązanié (Solutio.) Od iednégo i od drugiégo z punktów danych, poprowadziwszy łuk koła promieniém większym od odległości tych dwóch Punktów; tam gdzie się té dwa łuki przecinać będą, będzie punkt, którégo szukámy.

28. *Uwága.* Na rozwiązaniu tego, lubo tak łatwégo zagádniénia, zasadzá się *Wykréśléniè* Geometryczné wielu innych Zagádnień. Wykréśléniè to zowią po Łacinie *Constructio*, lubo tego samégo słowa zażywaią także Matematycy na oznaczénié przygotowania poprzedzaiącégo dowodzénié, przez kréślénic pewnych liniy potrzebnych do tegoż dowodzénia. My przykładém ich, w obudwóch także razach, używać będziémy tego słowa *Wykréślénié.* 29.

29. *Zagádnienié* 2. Daną liniią prostą, podzielić na dwie części równé.

Rozwiązanié. Sposobém w poprzedzaiącém Zagadnieniu wyrażonym, znáydźmy po obu dwóch linii téy stronach dwa punkta, któréby od końców iéy iednakowo były odległé; złączmy té dwa punkta liniią prostą, ta przetnie w jednym punkcie liniią daną, i w tém przecięciu będzie punkt podziału żądanego.

Táb. II. Fig. 3. Niech będzie liniiá daná AB, C Punkt równo-odległy od A i B, końców linii danéy, D, drugi punkt, podobnie także odległy. Punkt X, gdzie liniiá CD, przecina liniią AB, dzielić będzie na dwie równé części liniią daną.

Wykréślénié, (Constructio.) Pociągniymy liniie AC, BC, AD, BD.

Dowodzenié. Tróykąty: CDA, CDB, maią trzy boki równé iedné drugim; a zatem (25.) mogą przystać do siebie, a w szczególności, kąt ACD, równy iest kątowi BCD. Więc Tróykąty ACX, BCX, mieć będą boki AC, i BC, równé, bok CX, spólny, i kąt także w tych ramionach zamknięty równy; więc (24.) té dwa Tróykąty mogą do siebie przystać, i liniie AX. i BX. są równé.

30. *Defin:* Gdy w Tróykącie, albo w jakiéykolwiek innéy figurze, bok ieden

dén będzie przedłużony: kąt, który się między tém przedłużéniém i bokiem przyległym zrobi; nazywá się *Zewnętrznym* (externus) tego Tróykąta, lub innéy figury.

31. *Twiérdzénié 4.* W Tróykącie, zewnętrzny kąt większy iest od iednégo z wewnętrznych na przeciwko niego położonych.

Niech będzie Tróykąt ABC, którégo bok AB. przedłużony iest według upodobaniá ku D; kąt zewnętrzny CBD, większy iest niżeli ieden ze dwóch wewnętrznych, naprzykłád C. Táb. I. *Fig. 4.*

Przygotowanié. Przetniymy na połowę w punkcie E, bok BC, i poprowádźmy liniią AE, aż do F, aby FE, równała się AE; pociągniymy ieszcze i liniią BF.

Dowodzénié. Tróykątów: AEC, FEB, kąty przeciwné w wiérzchołku E, są równé, i ramiona tychże kątów równé, z wykreśléniá. Więc dwa té Tróykąty, mogą do siebie przystáć (18.) a w szczególności kąt C, równy iest kątowi EBF, który kąt EBF, iest tylko częścią kąta CBD. Przeto kąt cały CBD, większy iest od kąta C, równégo kątowi EBF.

32. *Wniosek.* (Corollarium.) Summa dwóch iakichkolwiek kątów w Tróyką-

cie,

cie, mnieyszá iest od dwóch kątów prostych. Ponieważ albowiém kąt CBD, większy iest od kąta C, Summa kątów CBD, ABC, większá będzie od Summy kątów C, i ABC; a że summa dwóch kątów piérwszych, wáży tylé co dwa kąty prosté, bo iest summą dwóch kątów przyległych (14) więc ta drugá summa mnieyszá iest od piérwszéy.

Idzie zatém, że ieżeli w Tróykącie, będzie kąt ieden prosty, albo też roztwarty, dwa inné, nié mogą bydź tylko każdy z nich ostry.

33. *Definicye.* Jeżeli Tróykąt zawiérá w sobie kąt prosty, zowié się *Prostokątnym* (Triangulum Rectangulum.) Jeżeli má kąt roztwarty, nazwać go możná *Roztwartokątnym* (Obtusangulum.) Jeżeli wszystkié trzy kąty má ostré, zwać się będzie *Ostrokątnym* (Acutangulum.)

34. *Twiérdzénié 5.* Gdy w dwóch Tróykątach, bok iednégo będzie równy bokowi drugiégo, i kąt tym bokóm przyległy równy iedén drugiému, a kąt nieprzyległy tym bokóm, także równy w obudwóch Tróykątach; dwa té Tróykąty mogą przystać do siebie.

Táb. II. Fig. 6. Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, maiącé dwa boki AB, ab, równé, kąty A, i a, przy tych bokach równé, i kąty C,

C, i c, równé. Té dwa Tróykąty mogą do siebie przystać.

Dowodzénié. Przenieśmy Tróykąt abc, na Tróykąt ABC, tak, aby bok ab, przystáwszy do boku AB, bok téż ac przystáwáł do boku AC; (co dlá równości kątów a, i A, nastąpić powinno.) Gdyby Punkt c, nie przypádł na punkt C, toby przypádł albo między punktami A i C, naprzykłád na d, albo daléy za punktém C, na linii AC, przedłużonéy, naprzykłád na D; w piérwszym razie, kąt AdB, albo C, byłby zewnętrzny Tróykąta CBd, a zatém większy od kąta C. W drugim razie kąt C, byłby zewnętrzny Tróykata CBD, a zatém większy od kąta D, albo c; co w obudwóch razach, iest przeciwko podaniu, bo kąty C, i c, dané, są równé. Więc liniiá ac, przeniesioná na AC, nie gdzie indziéy kończyć się będzie, iak na punkcie C, a zatém Tróykąty BAC, bac, mogą przystać do siebie. (18.)

35. *Twiérdzénié 6.* W każdym Tróykącie, ieżeli bok ieden większy iest od drugiégo; i kąt téż na przeciwko boku piérwszégo, większy będzie od kąta drugiému bokowi przeciwnégo.

Niech będzie Tróykąt ABC, którégo bok AC, większy od boku BC; będzie téż i kąt ABC, większy od kąta A. Táb. II. *Fig.* 5.

Przygotowanié. Na boku AC, większym, weźmy CD równą CB, i od D poprowádźmy DB. *Dowo-*

Dowodzénié. Tróykat równoramienny BCD, má kąty CBD, CDB, równé: kąt CDB iest zewnętrzny Tróykąta BAD; więc iest większy niżeli kąt A; a zatém i kąt CBD większy będzie od kata A; dopiéróż kąt CBA większy iest od tegoż kąta A.

36. *Twiérdzénié* 7. Gdy w Tróykącie, większy iest kąt ieden od drugiego; bok na przeciwko piérwszego kąta, większy téż będzie od boku przeciwnégo drugiému kątowi.

Dowodzénié. Gdyby bok przeciwny piérwszému kątowi, był równy albo mnieyszy od boku drugiému kątowi przeciwnégo, piérwszy téż kąt byłby równy drugiému, albo od niego mnieyszy. (35.) Ale przez podanié, tén piérwszy kąt nie iest ani równy, ani mnieyszy od drugiégo; więc téż i bok tému piérwszému kątowi przeciwny, nie będzie ani równy, ani mnieyszy od drugiégo boku; a przeto będzie większy od niego.

37. *Uwága.* W tém twiérdzéniu użyliśmy piérwszy ráz dowodzéniá *zbocznégo*, albo *przez niepodobność*. Po Łacinié piszący, nazywaią takié dowodzénie: *Demonstratio indirecta*, albo *per absurdum*. Okazuie się tym sposobém, że wszelkié inné odmiénné w téy mierze utwiérdzénié, byłoby fałszywém: a zatém to tylko iest prawdziwé, któégo dowodzimy.

38.

38. *Wnioski.* Ponieważ w Tróykącie prostokątnym i w Troykącie roztwartokątnym, kąt prosty, i kąt roztwarty, są z trzech kątów naywiększemi; przeto też boki naprzeciwko takich kątów leżącé, będą naywiększé.

A stąd między wszystkiémi liniiami poprowadzonemi od tegoż samégo punktu, od iedney linii, náymnieyszá iest liniiá prostopadłá. Inné liniie pochyłé, tym większe będą, im dalsze od prostopadłéy. Dwie także liniie pochyłe, równey wielkości, od Punktu tegoż samégo poprowadzić możná; a nie wiecéy, i té od prostopadłey równie będą odległé.

Stąd téż wypływá, że liniiá prostá, nié może przecinác okręgu koła w więcéy, iak we dwóch punktach, a to w tych, których odległość od śrzodka koła, równá się promiéniowi tegoż koła: bo ináczéy więcéy niż dwie liniie równé, możnáby poprowadzić od iakiégo punktu do trzeciéy linii.

39. *Defin:* Liniiá prostopadłá, spuszczoná od iakiégo punktu na inną liniią, nazywá się *odległością* tego punktu od linii, na którą spádá: a to dlá tego, że ta liniiá iest naykrótszą między wszystkiémi innémi, któréby od tegoż punktu možná poprowadzić do téy sáméy linii.

40. *Twierdzénie.* 8. W Tróykącie summa dwóch boków, większá iest od boku trzeciégo.

Táb. II. Fig. 7. Niech będzie Tróykąt ABC, Summa dwóch boków AB, BC, większá iest od boku AC.

Wykréślénie. Pociągnąwszy daléy bok AB, weźmy BD, równą BC, i złączmy ich końce liniią CD.

Dowodzénie. W Tróykącie równoramiennym BCD, kąty C i D, są równé; więc w Tróykącie ACD, kąt ACD, większy iest od kąta D; a zatém i bok AD, większy będzie od boku AC: a że AD równá się summie boków AB, BC, więc i ta summa boków iest większá od boku AC.

41. *Uwága.* To twierdzénié służyć nám może po części za obiaśnienié w tém, które iuż mámy, naturalnym linii prostéy wyobrażéniu. Widzimy tu oczywiście, że liniiá prostá, która łaczy dwa Punkta, mnieyszá iest, niżeli summa dwóch innych liniy do tychże Punktów poprowadzonych od punktu takiégo, który się nie znáyduie na linii łączącéy té dwa punkta.

42. *Twierdz:* 9. Jeżeli od śrzodka Linii prostéy wyprowadzimy prostopadłą; każdy Punkt w téy prostopadłéy,

będzie

będzie równo odległy od obudwóch końców linii piérwszéy; każdy zaś inny Punkt za tą prostopadłą wzięty, nie iednakową od tychże końców odległość mieć będzie.

Niech będzie prostopadłá CD, do śrzodka C, linii AB. Táb. II. *Fig.* 8.

Naprzód: Odległości DA, DB, Punktu ktöregokolwiek D, wziętégo na linii CD, od Punktów A i B. są równé.

Dowodzénié. W Tróykątach ACD, BCD, kąty prosté przy C, są równé, i ramiona przy tych kątach równé; więc dwa té Tróykąty mogą przystać do siebie; a zatém liniie AD, i BD są równé.

Powtóre: Niech będzie Punkt E, za prostopadłą DC, liniie EA, EB, nierówné będą.

Niech liniiá AE, przechodzi przez Punkt D, należący do prostopadłéy CD; od Punktu tego poprowádźmy liniią DB.

Dowodzénié. Liniie AD, BD, są równé, iako się iuż dowiodło: więc liniiá AE, równá się summie Liniy BD, DE. A że w Tróykącie BDE, summa boków BD, DE, większá iest od bóku BE; więc téż liniiá AE, większá iest od linii BE.

Zwy-

Zwykło się krócéy ieszcze to twiérdzénie tak wyrażać: *Linią prostopadłá, z pośrzodka innéy linii wyprowadzoná, iest mieyscém* (Locus) *wszystkich punktów oddalonych iednakowo od obudwóch końców téyże linii.* (g)

43. *Zagádniénié* 3. Od punktu danégo na linii prostéy wyprowadzić linią prostopadłą.

Rozwiązanié. Weźmy na danéy linii dwa inne Punkta, iednakowo od punktu danégo odległé; od każdégo z tych dwóch punktów, iako od śrzodka (a centro) iednakowym promieniem, większym iednak, niż iest odległość tych dwóch punktów od punktu danégo, nakreślmy dwa łuki przecinaiące się. Punkt dany, i drugi w przecięciu znaleziony ziączmy z sobą linią prostą, ta będzie prostopadłą, któréyśmy szukali.

44. *Zagádniénié* 4. Od punktu danégo za linią prostą, spuścić na nię linią prostopadłą.

Ro-

(g) Ponieważ liniiá prostá, przez dané położénié dwóch Punktów, iest iuż tém samém wyznaczoná; ieżeli tedy przez dwa inszé Punkta, z których każdy iednakową má od obudwóch punktów danych odległość, poprowadzimy linią, ta w śrzodku linii łączącéy dwa punkta dané, będzie prostopadłą.

Rozwiązanié. Znáydźmy dwa puńkta na linii danéy, iednakowo odległé od punktu danego; kreśląc od niego iako od śrzodka, iednakowym promiéniém, dwa łuki przecinaiące we dwóch punktach linią daną; szukaymy inszégo ieszcze punktu rownie od dwóch przecięciá punktów odległego. Linia łącząca ten punkt znaleziony, i drugi dany, iest ta sama prostopadła, któreyśmy szukali.

45. *Zagádnienié* 5. 1. Na danéy linii wystawić Tróykąt równoboczny.

2. Na daney linii wystawić Tróykąt równoramiénny, którégo ieden bok iest wiadomy.

3. Na danéy linii wystawić Tróykat, którégo dwa inne nierówné boki są wiadomé.

Rozwiązanié: 1. Z dwóch końców linii danéy, promiéniém równym téyże linii, pociągnąć trzeba po iednéy stronie dwa łuki, i punkt ich przecięciá złączyć z końcami linii danéy.

2. Z dwóch końców linii danéy, promiéniém równym linii, która ma służyć za ramié Tróykąta równoramiénnégo; pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięciá poprowadzić dwie linie do końców linii danéy.

3.

5. Z dwóch końców linii daney, promieniami odmiennemi, równemi w długości liniiom maiącym służyć za boki do Tróykąta, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia, poprowadzić dwie liniie do końców linii daney.

Przestroga. Summa dwóch liniy danych, powinna bydź większa od trzeciey linii także daney. (40.)

46. *Definicya.* Gdy uważamy Tróykąt, ile wystawiony iest na iakiey prostey linii; taka liniia nazywa się *Podstawą* (Basis) Tróykąta, a kąt naprzeciwko iey stoiący nazywamy *Wierzchołkiem Tróykąta* (Vertex Trianguli.)

47. *Przystósowanie.* Przerysować Tróykąt dany.

Rozwiązanie: Weźmy ieden z boków Tróykąta za Podstawę onego. Podstawę tę przenieśmy na insze mieysce, i od końców iey promieniami, dwóm innym bokóm równemi, nakreślmy dwa łuki, a od punktu ich przecięcia, poprowadźmy dwie liniie do końców podstawy; iuż tem samem przerysowany będzie Tróykąt dany, na inny iemu we wszystkiem równy.

48. *Zagadnienie 6.* Maiąc dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby

miał

miáł za iedno ramię liniią daną, a za wiérzchołek punkt na téy linii także dany.

Rozwiązanie. Zaczynaiąc od wiérzchołka kąta danégo, wziąźć trzeba na iego ramionach dwie iakiékolwiek liniie równé i końce ich złączyć trzecią liniią; zrobi się tym sposobém Tróykąt. Od punktu danégo na linii także daney, przenosi się długość, wziętá na iedném ramiéniu kąta danégo, i na niéy iak na podstawie, przerysuie się Tróykąt, piérwszému ze wszystkiém równy (47.)

49. *Przystósowanié.* 1. Zrobić Tróykąt, którégo wiadomé są dwa ramiona, i kąt między niémi.

2. Zrobić Tróykąt, którégo wiadomá podstawa, i dwa przy niéy kąty.

50. *Zagádniénié* 7. Zrobić Tróykąt, którégo dany iest kąt ieden, i dwa boki, iedén przyległy kątowi danému, drugi naprzeciwko niego leżący.

Uwága. Kąt dany może bydź *prosty*, *roztwarty*, albo *ostry*. W piérwszych dwóch razach, bok przeciwny kątowi danému, powinién bydź większy od boku przy kącie będącégo. (38) W trzecim razie, bok przeciwny kątowi, może bydź większy lub mnieyszy od drugiégo. We wszystkich tych razach, zróbmy kąt równy danemu, i dáymy mu za

C ra-

ramię, liniią równą daney, a maiącey mu służyć za toż ramię.

Z końca tey Linii promieniem równym bokowi danemu, który ma leżeć na przeciwko kąta danego, pociągniymy łuk, któryby przecinał drugie tegoż kąta ramię. Punkt przecięcia oznaczy koniec drugiego ramienia kąta.

Tab. II. *Fig.* 9. i Tab. III, *Fig.* 1, 2, 3.

Niech będzie C wierzchołek kąta danego, liniia CA równa linii daney za ramię tego kąta, i niech łuk kreślony od punktu A, iako od środka, promieniem równym linii drugiey daney (która ma służyć za bok przeciwny kątowi C;) przecina drugie ramię w punktach B, i b.

1. Gdy kąt C iest *Prosty*; dwa Tróykąty: ACB, ACb, mogą przystać do siebie; bo liniie pochyłe równe AB, Ab, iednakowo są od prostopadłey AC odległe, a zatem CB i Cb są równe.

W innych razach spuśćmy liniią prostopadłą AD.

2. Gdy kąt C iest *Roztwarty*, albo *ostry*, ale liniia AB, większa od AC; w tym razie liniie pochyłe i równe AB, Ab, dalsze są od prostopadłey AD, niżeli liniia pochyła AC; a zatem z dwóch Tróykątów ACB, ACb, ieden tylko Tróykąt ACB wypełnia trzy założone *Warunki* (Conditiones.)

3.

3. Gdy kąt C iest *ostry*, ale liniiá AB mnieyszá od AC; dwie liniie pochyłé i równé: AB, Ab, będą bliższé prostopadłéy AD, niżeli liniiá AC; a zatém Tróykąty ACB, ACb, lubo sobie nierównéé, obadwa iednak wypełnią trzy założoné warunki.

Powtorzénié przypádków, w których dwa Troykąty mogą przystać do siebie, albo w ktorych Tróykąt wyznaczony iest przez wiádomość dostateczną boków i kątów iego.

1. Dwa boki i kąt między niémi.

2. Bok iedén i dwa przy nim kąty.

3. Trzy boki.

4. Dwa boki i kąt prosty nie między niémi zawarty.

5. Dwa boki i kąt roztwarty nie między niémi zawarty.

6. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niémi, i gdy bok przeciwny danému kątowi iest náywiększy.

7. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niémi, i gdy bok przeciwny kątowi danému iest náymnieyszy. (Tén przypádek iest wątpliwy) bo dwoiakim sposobém Tróykąt czyni zadosyć trzém warunkóm.

51. *Uwága* 1. Nietylko z tych, któréśmy tu wymiénili wiadomości, ale i z jnnych iészcze wyznaczyć możná Tróykąt. Té iednak, które się tu wspomniały przypádki, naycześciéy zdárzać się zwykły, i wszystkié inne mogą się pod nié podciągnąć.

Cztéry ostatnié przypádki mogą bydź ściągnioné do iednégo. (Obácz w Rozd: 10. Twiérdz: 5.) Alé przy początkach lepiéy ié osobno podáwać.

52. *Uwága* 2. Samé tylko Tróykąty są takiémi figurami, gdzié wiadomość trzech boków iuż iest dostateczna do wyznaczénia Tróykąta. Okázać to w prostym przykładzié możná na *Czworoboku*, albo *Czworokącie* (Quadrilaterum,) którégo wszystkié boki są równé. Chociáż albowiém wiedzieć będziémy boki wszystkié tego Czworoboka; nie potrafimy iednak oznáczyć iaki Czworokąt stąd wyniknie, bo tym bokóm różné dadź możémy nachylénié; a zatém i Czworokątowi odmienną dadź możemy figurę. Tak n.p. ieżeli dámy mu kąty wszystkié prosté, zrobi się *Kwadrat*: ieżeli dámy dwa kąty ostré, a dwá roztwarté, zrobi się Czworokąt pochyły tym bardziéy, im ostrzszé iedné kąty, a drugié roztwartszé mieć będzie.

53. *Twiérdz:* 11. Liniiá prostá przecinaiącá kąt na dwie części równé, każdy

żdy w sobie punkt mieć będzie iednako-wo odległy od obudwóch ramión tegoż kąta: a wszelki inszy nie na téy linii Punkt, nie tak odległy będzie od iedné-go ramienia tego kąta, iak od drugiégo.

Niech będzie kąt: ACB, który na dwie części przeciná liniiá CD; ieżeli Punkt iaki na niéy, naprzykład D, weźmiémy, liniie prostopadłé DE, DF, do ramión tego kąta spuszczoné, będą równé. Táb. III. *Fig.* 4.

Dowodz: Dwa Tróykąty prostokątné CDE, CDF, któré bok CD spólny mają, i kąty przy C równé, mogą przystać do siebie (18.) więc liniie DE, DF, są równé.

Niech znowu będzie Punkt G, nie w linii CD; prostopadłé GE, GH, będą nierówné.

Niech albowiém prostopadłá GE, spotyká w punkcie D, liniia CD, która na dwie części dzieli kąt ACB. Od Punktu D, spuśćmy prostopadłą DF, i poprowádźmy GF.

W Tróykącie DFG, summa linii FD, DG, większá iest od boku FG; ale ta summa linii FD, i DG, równá się linii EG; więc liniiá EG, większá iest od linii FG. A że znowu liniia GF, większá iest od linii GH, (38.) więc tym bardziéy liniiá EG, większá będzie od linii GH.

54.

54. *Uwága*. Liniiá prostá, która przedziélá kąt na dwie równé części, nazywá się *Mieyscém* wszystkich Punktów, których odległość iednakowá iest od dwóch liniy danych.

55. *Zagádn*: 8. Dány maiąc kąt, na dwie części go podzielić.

Rozwiązanié. Od wiérzchołką tego kąta, wziąwszy na ramionach iego dwie liniie rowné, z końców ich kreślę dwa łuki iednakowym promiéniem. Przez ich przecięcié, i przez wierzchołek kąta, prowadzę liniią, ta dzielić będzie kąt na dwie równé części.

56. *Wniosek*. Będzie téż możná każdą z tych połowę podzielic daley na dwie równé części, te znowu na dwie i t. d. Przeto każdy kąt może bydź (przynáymniéy myślą) podzielony, na 2, 4, 8, 16, i t. d. części równych.

ROZDZIÁŁ III.

O Liniiach równo-odległych i o równo legło-bokach.

57. *Twiérdzénié* 1. Niech będzie liniiá prostá, od którey dwóch punktów wychodzą dwie liniie prostopadłé. Té prostopadłé nigdzié się nie zniydą, choć-

choćbyśmy ié náybardziéy przedłużali.

Dowodz: Gdyby té prostopadłé, gdzie się zeszły, zrobiłyby z trzecia liniią, od któréy są wyprowadzoné, Tróykąt maiący dwa kąty prosté; a to iest niepodobná.

58. *Defin:* Dwie liniie na *Płaszczyznie* (Planum) poprowadzoné, gdy się zeyśdź z sobą nié mogą, nazwané są *Równo-odległé* (Parallelae.)

W ogólności zaś mówiąc: iakiékolwiek liniie dwie prosté od trzeciéy przecięté iednakowo z jednéy strony nachylaiace się do téy trzeciéy linii, są równo-odległé.

59. Niechby naprzykład liniie CF, DG, przecięte w punktach A, i B, od linii HE, miały kąty, CAE, DBE, równé; te dwie liniie nié mogą się nigdzie zeyśdź z sobą. Gdyby albowiém gdzie się zeszły, w Tróykącie z nich i z trzeciéy linii AB złożonym, byłby kąt zewnętrzny DBE, równy iednému z wewnętrznych CAE; co bydź nié może. (31.) Táb. III. Fig. 5.

60. *Wniosek:* Ponieważ kąt HBG, równá się kątowi DBE, (16.) a kąt HAF kątowi CAE, można podobnie dowieśdź że liniie CF, DG, nie zeydą się ani z drugiéy ſtrony linii HE.

61.

61. *Defin:* Kąty DBE, CAE, nazwać można *iednostronné*, podobnie, iako i kąty: DBH, CAH; EBG, FAF; GBH, FAH, katy: DBH. CAE, nazywaią się *Wewnętrzné* (Interni) takie też są i katy: FAE, GBH. Kąty: FAE, DBH, nazwać można kątami na przemián, toiest na przemián ległémi (po Łacinie zowią się *Alterni*) toż nazwisko daie się i kątóm CAE, GBH.

Té Definicye znać dobrze Uczniowie powinni.

62. Kąty przyległé: DBE, DBH, czynią razém dwa kąty proste: (14.) ale że kąt DBE równá się kątowi CAE, dlá równéy pochyłości obudwóch liniy DB, i CA, do linii HE; więc i katy wewnętrzné: DBH, CAE, razém wzięté równé będą dwóm kątóm prostym.

63. Kąty w wiérzchołku przeciwné DBE, HBG, są równé (16.) więc i kąty na przemián CAE, HBG równé będą.

64. Piérwszé Twiérdzénié można i tak wyrazić: że ieżeli dwie liniie prosté przecięté przez liniią trzecią, czynić będą z nią kąty iednostronné równé, albo kąty na przemián równé, albo że dwa kąty wewnętrzné równać się będą summie dwóch kątów prostych; takié liniie będą równo odległé.

65.

65. Zagádn: 1. Daną maiąc iednę liniią, poprowadzić drugą równo odległą, przez punkt dany.

Niech będzie liniiá daná BC, i punkt A także dany: przez tén Punkt poprowadzić liniią równoodlégłą od linii danéy BC. Táb. III. *Fig.* 6.

Rozwiązanié. Przez Punkt A ciągniymy iakażkolwiek liniią, naprzykład AD, do BC. Przy Punkcie A, zróbmy kąt DAE, równy kątowi ADC. Liniiá AE, będzie tą równoodległą, któréysmy szukali.

Dowodz: Kąty na przemián DAE, ADC, są równé; więc liniie BC, AE, są równoodległé.

66. Twiérdz: 2. Jeżeli kąty iednostronné CAE, IBE, nie są równé, choćby téż i bardzo nieznaczná była ich różnica; wszelako iednak liniie AC, BI, zniydą się gdziekolwiek z sobą; albo (co na iedno wychodzi) ieżeli summa kątów wewnętrznych IBH, CAE, mnieyszá, albo większá iest od dwóch kątów prostych; tedy dwie liniie CF, IL, zniydą się z téy strony linii HE, gdzie ta summa iest mnieyszá od dwóch kątów prostych. Táb. IV. *Fig.* 1.

Na dowodzéniu tego Twiérdzéniá wysilali od dáwnych czasów dowcipy swoie Geometrowie, i pospolicie fałszywie ié dowodzili; bo będąc to Twiérdzénié

w so-

w sobie tak iasné, można było i bez dowodzenia na nié przystać. Można iednak dowieśdź ié bez popadnienia omyłce: ale dowody té tak długié, że ciąg i związek ich, wielkiégo natężénia, uwági, i rozumu wyciągaiący, znudziłby uczniów tym bardziéy, imby mniey przeświádczéni byli o pożytku i potrzebie tego dowodzénia. Rozumiém, idąc w tém za przykładém Euklidesa, że lepiéy iest miec to Twierdzénié za oczywisté, zwłászcza dowiódłszy iuż dwóch innych Podáń *odwrótnych*, (Propositio inversa:) pierwszégo, że, gdy liniie schodzą się z sobą, kąty iednostronné są nie równé: drugiégo, że, gdy kąty iednostronné równé są, liniie z sobą się zeyśdź nigdzie nié mogą.

67. *Wniosek.* Jeżeli dwie liniie są równoodległé, a trzecia ié przeciná; kąty iednostronné będą równé, kąty na przemián także równé, i kątów dwóch wewnętrznych summa równać się będzie summié dwóch kątów prostych. Jedén z tych trzech wniosków przypuściwszy, przypuścić trzeba i dwa drugié, tak, iak w piérwszém Twiérdzeniu. Jakoż, gdyby którákolwiek z tych trzech równości kątów, nie była prawdziwa, iużby tém samem liniie zeyśdź się gdzie z sobą mogły, toiest nie byłyby równoodległé.

Defin: Czworokąt, którégo boki naprzeciwko siebie leżącé są równoodległé,

na-

nazywać będziémy *Równoległobokiém.* (Parallelogrammum.) Liniią, która łączy wiérzchołki dwóch kątów przeciwnych, nazwiemy *Przekątną* (Diagonalis.)

68. *Twiérdz:* 3. W każdym Równoległoboku, boki przeciwné i kąty przeciwné są równé.

Niech będzie Równoległobok ABCD, mieć on będzie boki AB, i DC równé; boki AD, i BC także równé, i kąty przeciwné A i C, iako téż B i D, równé. Táb. IV. *Fig.* 2.

Przygotowanie. Poprowádźmy przekątną AC.

Dowodz: Dwa Tróykąty: ACB, CAD, mogą przystać do siebie: maią albowiem bok AC spólny, kąty na przemián ACD CAB, ròwné, i kąty na przemián CAD, ACB także równé; a zatém (23.) i liniie AB, DC są równé, iako téż i liniie AD, BC; kąty także B i D równé, i kąty A i C iako składaiącé summę kątów względém siebie równych w obudwóch Tróykątach, także równé.

69. *Wniosek* 1. Przekątná dzieli Równoległobok na dwa Tróykąty, któré przystać do siebie mogą.

70. *Wniosek* 2. Jeżeli dwie liniie są równoodległé, spuściwszy od dwóch punktów

któw iednéy, dwie prostopadłé do drugiéy, té prostopadłé równe będą.

71. *Wniosek* 3. Jeżeli Równoległobok má iedén kąt prosty, wszystkié téż inné kąty iego prosté będą; a ieżeli dwa iego boki przyległé, są równe, wszystkié także boki równé będą.

72. *Defin:* Równoległobok, którégo kąty są prosté, nazywá się *Prostokątém* (Rectangulum.)

Prostokąt, którégo wszystkié boki są równé, zowié się *Kwadratém.* Równoległobok, który má kąty nierówné, zachowuie nazwisko Równoległoboku; lubo czaséin z przydatkiém się wyráżá, że iest Równoległobokiém *Ukośnym* (Obliquangulum.) Równoległobok ukośny, którego boki wszystkié są równé, nazwany bydź może *Kwadratém ukośnym* (Rhombus.)

73. *Twiérdz:* 4. Jeżeli w Czworokącie boki przeciwné są równé, taki Czworokąt będzie Równoległobokiém.

Fig. taż co wyżéy

Niech będzie Czworokąt: ABCD, którégo boki przeciwné AB, CD, są równé, i boki przeciwné AD i BC także równé, tén Czworokąt będzie Równoległobokiém.

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną AC. Do-

Dowodz: W Tróykątach: ACD, CAB, boki trzy w jednym równé są trzém bokóm w drugim; (68.) więc przystać do siebie mogą (25:) w szczególności zaś kąty na przemián CAB, ACD są równé, więc liniie AB, CD są równoodległé: podobnie i liniie BC, AD są także Równoodległé.

74. *Twiérdz:* 5. Jeżeli w Czworokącie dwa boki przeciwné są równé, i równoodległé; taki Czworokąt iést równoległobokiém.

Niech będzie Czworokąt ABCD, którégo boki przeciwné AB, CD są równé, i równoodległé, tén Czworokąt iest Równoległobokiém. *Fig. taż co wyżéy*

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną AC.

Dowodz:: Dwa Tróykąty: ACD, CAB, maią bok AC spólny, boki AB i CD równé i kąty na przemián: ACD, CAB, zawarté między témi bokami, równé; więc przystać do siebie mogą; (18.) a w szczególności, kąty: CAD, ACB będą równé, że zaś są na przemián: więc liniie AD i CB są równoodległé.

75. *Uwága.* Czworokąt może mieć dwa boki równoodległé, a dwa inné równé, a nie bydź przeto Równoległobokiém, chyba w tén czas, gdy boki przyległé

ległé bokóm równoodległym, są prostopadłé. Widzieć to można na Figurze 3. gdzie lubo Czworokąt ABCD, ma boki dwa przeciwné: AB i CD równoodległé, boki AD i BC równé, nie iest iednak Równoległobokiém.

76. *Zagádn*: 2. Maiąc daną liniią prostą, postawić na niey Kwadrat.

Rozwiązanié. Z końca iednégo linii danéy, wyprowádźmy prostopadłą iéy równą. Z drugiégo końca téy danéy linii i prostopadłey, iako do śrzodka prómieniém równym danéy linii, nakréślmy dwa łuki okręgu, i Punkt ich przecięcia złączmy z końcém linii danéy i prostopadłéy.

Dowodz: Czworokąt tak zrobiony, będzié miał wszystkié boki równé, i kąt iedén prosty; więc będzie Kwadratém.

77. *Zagádn*: 3. Wykréślić prostokąt, którégo boki są dané.

Sposób wykréśléniá iest tén sám, co wyżéy, (76.) z tą różnicą, że prostopadłá powinná mieć długość daną, a nie bydź równą podstawie; promiénie także łuków kreślić się maiących, iedén powinién bydź równy podstawie, a drugi prostopadłey.

78. *Zagádn*: 4. Wykréślić Równoległo-

głobok, którégo kąt iest wiadomy, i boki.

Sposób wykréślénia tym tylko różni się od poprzédzaiącego, że zamiást prostopadłey poprowadzić potrzeba liniią z tem nachyléniem, któréby czyniło kąt dany.

ROZDZIÁŁ IV.

O kątach w Figurach Prostokréślnych, a w szczególności w Tróykątach.

Widzieliśmy, (31.) że kąt zewnętrzny Tróykąta, większy iest od iednégo z dwóch kątów wewnętrznych iému przeciwnych; dowiedziémy teráz, że tén kąt zewnętrzny równá się obudwóm kątóm wewnętrznym naprzeciw siebie leżącym.

79. *Twiérdz:* 1. Niech będzie Tróykąt: ABC; a kąt iego zewnętrzny: CBD; tén kąt równy iest summie dwóch kątów wewnętrznych: A i C. Táb. IV. *Fig.* 4.

Przygotowanié. Poprowádźmy BE, równoodległą od AC.

Dowodz: Kąty na przemián C i CBE są równé; równé także i kąty iednostronné: A, i EBD; więc summa kątów: C i A, równá iest summie kątów: CBE i EBD, toiest kątowi zewnętrznému CBD.

80.

80. *Twiérdz:* 2. W każdym Tróykącie, summa trzech kątów równá iest dwom kątóm prostym.

Niech będzie Tróykąt: ACB; summa trzech iego kątów, równá się summie dwóch kątów prostych.

Przygotowanie. Pociągniymy daléy AB, naprzykład aż do D.

Dowodz: Już się dowiodło, że kąt zewnętrzny CBD, równá się dwóm kątóm wewnętrznym A i C; więc summa kątów CBD, i CBA, równać się będzie summie kątów: A, C, i CBA; ale summa dwóch pierwszych kątów, iako przyległych, wyrównywa dwóm kątóm prostym, więc i druga trzech kątów summa, tymże dwóm kątóm prostym iest równá. (h)

(h) To Twiérdzénié iest bardzo wielkiéy wági; przeto trzeba, aby iak náydokładniéy zrozumieli ié Uczniowie, iako inszé Twiérdzéniá, od których dowiedziénié tego zawisło. Tu podobno mieyscé byłoby pokázaniá związku Twiérdzéń dotąd podanych iednych z drugiému, który to związek istotny iest postępowaniu Geometrycznému. Ćwiczéniá, które poprzedziły, iuż powinny były dadź poznać Uczniom tén sposób postępowaniá. Trzeba iédnak często im związek takowy okazywać, i iak się iedna prawda z drugiéy odkrywá. Stąd náywiększy pożytek z Matematyki odniésć mogą, i nabiorą práwdziwe-

81. *Wniosek* 1. W Tróykącie równobocznym, każdy w szczególności kąt, iest trzecią częścią dwóch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ kąta iednégo prostégo, toiest, każdy waży 60. stopni.

82. *Wniosek* 2. W Tróykącie, znaiąc dwa kąty, już tém samém znany i kąt trzeci.

Przykład. Niech będzie Tróykąt, którégo kąt iedén má stopni 50, a drugi 72°, summa tych dwóch kątów będzie 122°. Różnica zaś 122. od dwóch kątów prostych, albo od 180°, iest 58°, i ta iest ważność trzeciégo kąta.

83. *Wniosek.* 3. W Tróykącie równoramiénnym, znaiąc kąt ieden, poznámy zaráz i dwa drugié.

Przykład. Niechby kąt iedén przy wiérzchołku ważył 40°; w Tróykącie równoramiénnym. Już tém samém dwa inszé ważą 140°; aże są równé, każdy z nich ważyć będzie połowę, toiest 70°.

---

go ducha Matematycznégo: co nierównie pożyteczniéy im będzie, iak mieć nawet wiadomość saméy Matematyki.

Niechby znowu kąt ieden przy Podstawie ważył 64°, i drugi przy Podstawie ważyłby 64°. Summa tych dwóch kątów byłaby 128°, a różnica między 180°, i 128°. toiest 52°, pokazałyby ważność kąta trzeciego.

84. *Defin:* Figura maiąca więcey niż cztery boki, albo kąty, nazywa się *Wielokątem* (Polygonum.)

85. *Twierdz:* 3. Ważność summy kątów wszystkich w Figurze *Prostokreślney* (Figura Rectilinea,) zawisła od liczby boków teyże Figury. Liczbę tę boków podwoiwszy, i odciąwszy od podwoioney liczbę: 4; reszta okaże w kątach prostych ważność kątów wszystkich Figury prostokreślney. Nim się przystąpi do ogólnego dowodzenia, trzeba zacząć od przypadków szczególnych w sposób podobny następuiącemu.

Niechby naprzykład Figura Prostokreślna miała tylko cztery boki, toiest niechby tylko była Czworokątem. Poprowadziwszy w niey Przekątną, ta podzieli Czworokąt na dwa Tróykąty, w których summa kątów razem wzięta, będzie równa summie kątów w Czworokącie. Aże ta summa kątów w dwóch Tróykątach, waży cztery kąty proste; więc

więc i summa kątów w Czworokącie ważyć także będzie cztéry kąty prosté.

Niechby Figura miała pięć boków, toiest była *Pięciokątém* (Pentagonum.) Poprowádźmy od iednégo wierzchołku, do dwóch drugich przeciwnych dwie Przekątné; podzielą oné Pieciokat na trzy Tróykąty, których summa ważności kątów, toiest 6. kątów prostych, będzie téż summą ważności kątów Pięciókąta.

Dowodzénie ogólné. Od wiérzchołku kąta którégokolwiek w Wielokącie, poprowádźmy tylé przekątnych, ilé można. Postrzeżémy łatwo, że Tróykątów liczba z tego podziału wynikaiącá, mnieyszá będzie dwoma, od liczby boków Wielokątá: albowiém od kąta tego, od którégo się prowadziły Przekątné, nie można ich było prowadzić do dwóch innych kątów náybliższych, boby tylko przykryły sobą dwa náybliższé boki, albo ramiona tego kąta, i nie zrobiły Tróykątów. Ponieważ zaś w każdym Troykącie ważność trzech kątów, równá się ważności dwóch kątów prostych, będzie więc dwa razy tylé zawiérało się (co do ważności) kątów prostych w Wielokącie; ilé się zawiérá w nim Tróykątów. A że liczba Tróykątów, mnieyszá iest dwóma, od liczby boków Wielokąta; więc liczba kątów prostych, w tym-

że Wielokącie, będzie dwa razy tak wielká, toiest będzie się równać liczbie boków podwoionych, odtrąciwszy od niéy dwa razy 2. toiest 4; a zatém ważność kątów wszystkich wielokąta w kątach prostych znaydziemy odeymuiąc liczbę 4. od liczby podwoioney boków tegoż Wielokąta. (i)

86.

(i) Dowodzénié to mogłoby się wydáwać trudném, gdyby go wielé przykładów na Wielokątach szczególnych nie poprzedziło, i Figury na każdy szczególny przykład kréślone nie obiaśniły. Wielé iednak na tém zawisło, aby i bez Figury przyuczali się Uczniowie dáwać sprawę z tego, czego się nauczyli: a tym sposobém aby wprawiali się w zachowanié dobrégo porządku, tak w wyobrażéniach, które sobie czynić będą, iako téż i w samych wyrazach. Szczególnieyszégo zaś starania przykładać trzeba, aby bardziéy rozumém, niż pamięcią wszystko to, czego się uczyć będą, ogarnywali. Z téy przyczyny przy rozwiązaniu niektórych zagádnién, opuszczało się umyślnie Figury. Niech iednak stąd nie wnoszą Nauczyciele, aby wcale bez Figur obeyśdź się mogło: i owszém niech przyuczaią Uczniów, aby ié sami sobie kréślić umieli z pamięci, zrozumiáwszy piérwéy Twiérdzéniá, do których dowodzéniá stósować się máią té Figury. Przykłady dotąd przytoczoné, tym sposobém się podáwały, którym potrzeba, aby i Uczniowie dáwali sprawę z działán iuż dobrze od siebie poiętych. Odpowiédź náypospolitszá młodych iest, tych nawet, którzy lepiéy rzecz przenikaią: *Umiém ia to, ale się wytłumaczyć nié mogę.*

86. *Twierdz:* 4. Pociągnąwszy daléy w jednę stronę boki wszystkie Wielokąta, iakążkolwiek będzie liczba boków iego, zawsze iednak summa katów zewnętrznych, zamkniętych między bokiém iednym i przedłużéniém drugiégo przyległégo, ważyć będzie cztéry kąty prosté. (k)

Nim się przystąpi do ogólnégo Dowodzéniá, trzeba piérwéy na szczególnych przykładach tego Twierdzenia dowieśdź, zacząwszy od Tróykąta, w którym każdy kąt z swoim zewnętrznym przyległym waży dwa kąty prosté: a że kątów iest w Tróykącie trzy; więc z przyległémi ważyć będą sześć kątów prostych: trzy zaś kąty, które się w Tróykącie znáyduią, wáżą dwa kąty proste: więc té, które są za Tróykątem, toiest zewnętrzné, ważyc będą cztéry kąty prosté.

Dowodzénię ogólné. Każdy kąt wewnętrzny w Wielokącie, z swoim zewnętrznym przyległym, wáży dwa kąty prosté: więc summa wszystkich kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych, waży dwa kąty prosté wzięté tylé razy,

(k) Mówię tu tylko o wielokątach, w których kąt każdy mnieyszy iest od dwóch kątów prostych, toiest o takich, w których kąty są wyskakuiącé (*Salientes.*)

zy, ilé iest boków w Wielokacie; a zatém summa samych kątów zewnętrznych, wázyc będzie tylé, ilé brakuie summie kątów wewnętrznych, aby ważyła dwa kąty prosté wzięté tylé razy, ile má boków Wielokąt. Ale że, (iakośmy w poprzedzaiącém Twiérdzéniu dowiedli,) brakuie do tego tey summie kątów cztéry; więc summa kątów zewnętrznych Wielokąta ważyć będzie cztery kąty prosté.

87. *Uwága*. 1. Náywiększéy wági są té przypádki, w których kąty wszystkié Wielokąta są równé. Każdy w tym razie kąt zewnętrzny, waży 4. kąty prosté, podzieloné przez liczbę boków Wielokąta. Ważnośc zaś każdégo kąta wewnętrznégo znáydziémy, odtrąciwszy tén Wieloráz, toiest: ważnośc iednégo kąta zewnętrznégo od dwóch kątów prostych.

Jeżeli wszystkié kąty wielokąta są równé; tedy im większy będzie każdy kąt iego zewnętrzny, tym mnieyszy będzie wewnętrzny: a im mnieyszy tamtén, tym tén większy.

Po dowiedzionych tych Twiérdzéniach, łatwo będzie Ucznióm ułożyć sobie Táblicę ważności kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych w tych wielokątach, w których kąty wszystkié są równé, i mogą tę ważnośc wyrazić, czyli to przez kąty prosté, czyli przez stopnie.

88.

88. *Uwága* 2. Umieiąc dowiésdź dwóch Twierdzéń poprzedzaiących, można rozwiązać i to, co następuie zadanié:

Jak wielorakim sposobém około Punktu danégo napełnić można mieyscé (to iest cztery kąty próste) przez kąty Figury Prostokréslnéy iednego gatunku, (1) i którey wszystkié kąty są równé?

1. Gdy Tróykąt má wszystkié boki równé, czyli iest Równobocznym; każdy z kątów iego wáży trzecią część dwóch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ iednégo kąta prostégo; a zatém sześć takich kątów, uczyni 4. kąty prosté, i napełni mieyscé około Punktu iednégo.

2. Gdy Czworokąt má wszystkié kąty równé czyli iest Prostokątém; każdy z kątów iego iest kątém prostym, a zatém 4. takié kąty wáżyć będą 4. kąty prosté.

3. Kąt zewnętrzny Pięciokąta, którégo kąty wszystkié są równé, wáży $\frac{1}{5}$.

część

(1) Mówię, *iednégo gatunku*, ponieważ gdyby wolno było miészać kąty różnych Wielokątów; możnáby 14. sposobami napełnić mieyscę około iednégo Punktu, używaiąc tych tylko Wielokątów, które kąty wszystkié równé maią.

część cztérech kątów prostych, albo $\frac{4.}{5.}$ iednégo kąta prostego; a zatém każdy kąt wewnętrzny, ważyć będzie: $\frac{1.}{5.}$ kąta prostégo. Trzy takowe kąty, czynią tylko 3. kąty prosté i $\frac{3.}{5.}$ co iest mniéy iak 4, a cztéry takié kąty, czynią 4. kąty prosté i $\frac{4.}{5.}$ co iest więcéy iak 4. Przeto kątami Pięciokąta, maiącégo wszystkié kąty równé nie można napełnić mieysca około Punktu iednégo.

4. Kąt zewnętrzny Sześciokąta, którégo kąty wszystkié są równé, waży $\frac{1.}{6.}$ część cztérech kątów prostych, albo $\frac{2.}{3}$ iednégo kąta prostégo: a zatém każdy kąt wewnętrzny ważyć będzie, 1. $\frac{1.}{3.}$ kąta prostego. Trzy zaś takowé kąty, czynią zupełnie cztéry kąty prosté.

Jeżeli Wielokąt ma więcéy niż 6. boków, każdy z kątów iego wewnętrznych, będzie większy od kąta w sześciokącie; trzy więc takowé kąty uczynią więcéy niż 4. kąty prosté; a że kąt Wielokąta maiącégo boki wszystkié równé, iest zawsze mniéyszy od 2. kątów prostych; więc dwa takié kąty nie wystarczą na napełnienié mieyscą około Punktu iednégo.

Táb. IV. *Fig.* 5. 6. *i* Táb. V. *Fig.* 1. Przeto trzéma tylko sposobami rozwiązać można wzwyż wyrażoné Zadanie,

nié, toiest przez 6. kątów Tróykąta, przez cztéry kąty Czworokąta, i przez trzy kąty Sześciokąta.

Natura sama naúczyła Pszczoły układać w ulu komórki w sześciokąty.

ROZDZIÁŁ V.

O Równoległobokach i Tróykątach równych co do Powiérzchni, i o zamiénieniu iakiéykolwiek Figury Prostokréślnéy na Tróykąt i na Równoległobok.

Widzieliśmy w Rozdziele drugim przypádki w których dwa Tróykąty mogą przystać do siebie, i bydź zatém co do Powiérzchni, równé. W Rozdziele trzecim widzieliśmy także, iako dwa Równoległoboki, któré miały i boki i kąty równé mogły przystać do siebie, i że zatém powiérzchnie ich równé były. Té przypádki przystáwaniá iednych Figur do drugich były tylko, co do równości Powiérzchni, przypádkami szczególnémi; ogólnieysze zaś w téy mierze Twiérdzénia będą rzeczą tego Rozdziału.

89. *Twiérdzénie* 1. Dwa Równoległoboki zrobioné na iednéyże Podstawie, a z przeciwnéy strony zakończone przez Liniią rownoodległą od postawy, maią Powiérzchnie równé. Niech

Táb. V. Fig. 2. 3. 4. Niech będą dwa Równoległoboki: ABCD, ABEF, których taż sama iest Podstawa AB, a kończy ie z drugiey strony, równoodległa od Podstawy Liniia: DE. te dwa Równoległoboki, maią równe Powierzchnie, iakażkolwiek boków ich długość będzie.

Dowodz: Tróykąty: DAF, CBE. mogą przystać do siebie; boki albowiem AD, BC są równe, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABCD; boki też AF, BE, równe, bo naprzeciwko leżące Równoległoboku ABEF. Kąty oprócz tego iednostronne: ADF, BCE, i AFD, BEC, równe. Odiąwszy tedy osobno Tróykąt DAF, i Tróykąt iému równy CBE, od całey Figury ABED; reszty będą równe, toiest Równoległobok AFEB, równy będzie Równoległobokowi ABCD.

To Twierdzénie możnáby obiaśnić Figurą z papiéru grubégo wyrobioną, i zacząć od przypádku, który wyráża Figura 2. gdzie punkta C i F razém przypádaią. W takim razie Tróykąty: ACD, BEC równe są piérwszy i drugi Tróykątowi: ABC; a zatém i sobie są równe; więc tak równoległobok ABCD, iako i ABEF złożony iest z dwóch Tróykątów równych.

90. *Defin:* Ponieważ liniie prostopadłe spuszczone od któregokolwiek Punktu linii, na drugą liniią równoodległą, są ró-

równé; ieżeli więc od punktu którégo-kolwiek w boku Równoległoboku spuścimy do boku przeciwnégo liniią prostopadłą; ta prostopadła iednakowéy zawsze będzie wielkości, i nazywá się *Wysokością* tego Równoległoboku, względem drugiégo boku, do którégo iest spuszczona, i który wzięty iest za Podstawę tegoż Równoległoboku. Twiérdzénié poprzedzaiącé możnáby téż i tak wyrazić: *Dwa Równoległoboki maiącé spólną Podstawę, i wysokość iednakową, są rowné.*

91. *Twiérdzénié* 2. Dwa Równoległoboki są równé, których Podstawy i wysokości równé.

92. *Dowodz:* Do Podstawy iednégo z tych Równoległoboku, przyłóżmy Podstawę drugiégo; przystaną zupełnie do siebie té Podstawy, bo są równé; będą więc té postawioné na sobie Równoległoboki miały spólną Podstawę, i równą wysokość; a zatém według piérwszégo Twiérdzéniá będą równé.

93. *Twiérdz:* 3. Jeżeli dwa Równoległoboki zrobioné na iednéy Podstawie, równé maią Powiérzchnie, równé téż i wysokości mieć będą.

Niech będą dwa Równoległoboki ABCD, ABEF, których obudwóch Podstawa iest AB, i równá Powiérzchniá; mają oné i wysokość iednakową, to iest Táb. V. *Fig.* 5.
za-

zakończoné są przez tę samę liniią rownoodległą od Podstawy.

Dowodz: Gdyby Punkta F i E, nie były na linii DC, albo na iéy przedłużéniu; toby inné iakié Punkta naprzykład H, i G. linii AF, BE, były na teyże linii DC, a zatém Równolegloboki ABCD, ABGH, byłyby równé. Aleśmy wzięli za równé Równoległoboki ABCD, i ABEF; więc i Równoległoboki ABEF, i ABGH byłyby równé, co iest niepodobna, chyba że Punkta H i G będą té samé, co i Punkta F i E.

W ogólności mówiąc: Dwa Równoległoboki, maiącé równé Podstawy i Powiérzchnie, maią też i równé wysokości; a gdy znowu Równoległoboki mieć będą wysokości i Powierzchnie równé, i Podstawy ich równé będą.

94. *Twiérdz:* 4. Gdy Tróykąt i Równoległobok, stoi na teyże saméy Podstawie, a wiérzchołek Tróykąta przypádá na boku równoodległym od Podstawy i należącym do Równoległoboku, albo na przedłużéniu tegoż boku; taki Tróykąt iest połową Równoległoboku.

Táb. VI. *Fig.* 1. Niech będzie Równoległobok ABCD, a Tróykąt ABE, maiący z nim spólną podstawę AB, i niech wierzchołek E,

Tróy-

Tróykąta przypádá na boku DC należącym do Równoległoboku; Tróykąt tén ABE, będzie połową Równoległoboku ABCD.

Przygotowanié. Przez B poprowádźmy BF, równoodległą od AE, którába spotkała DC, w F.

Dowodzénié. Tróykąt ABE, iest połową Rownoległoboku ABFE, ponieważ bok BE Tróykąta iest Przekątną Równoległoboku: ABFE. A że Równoległoboki ABFE, ABCD, są równé; więc Tróykąt ABE, iest także połową Równoległoboku ABCD.

95. *Defin:* Prostopadła spuszczoná od wierzchołku Tróykąta do Podstawy, nazywá się *wysokością* tego Tróykąta. Twierdzénié tedy powyższé takby mogło bydź inaczéy wyrażone: *Jeżeli Rownoległobok i Tróykąt maią spólną Podstawę, i wysokość równą, Tróykąt tén będzie połową Równoległoboku.*

96. *Wniosek.* Możná więc przystósować wszystko do Tróykątów, cokolwiek się o Równoległobokach powiedziało. I tak:

1. Dwa Tróykąty maiącé równé Podstawy i wysokości, równé mieć będą i Powiérzchnie.

2.

2. Dwa Tróykąty równe w Powierzchniach, i w wysokościach albo w Podstawach; będą też miały równe Podstawy lub wysokości.

W ogólności zaś mówiąc: z tych trzech ilości; z Podstawy, wysokości, powierzchni Równoległoboku lub Tróykąta, dwie którekolwiek wiadome, trzecią poznać daią; iedna zaś nie iest dostateczna, aby z niey dwie drugie wyznaczyć można. Obaczymy daley w tym Rozdziele, iako można zrobić tyle Równoległoboków równych i równokątnych, ile zechcemy, chociaż boki nierówne mieć będą. (m)

97. *Zagadn:* I. Maiąc dany Równoległobok, zamienić go na Prostokąt, któryby tę samę miał Podstawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie. Od obudwóch końców Podstawy, wynieśmy linie prostopadłe, aż do boku Podstawie przeciwnego; zrobi się Prostokąt równy Równoległobokowi, co do Podstawy i Powierzchni.

Podobnym sposobem postąpić sobie po-

(m) Trzeba to dobrze dadź poznać Uczniom, że wielkość Równoboków i Tróykątów nie zawisła od ich obwodu (Perimeter) omyłki w tey mierze częste zwykły bywać.

potrzeba, chcąc zamienić Równoległobok dany na drugi równy pierwszému w Podstawie i w Powierzchni, gdy inny iakikolwiek kąt przy Podstawie, a nie prosty dany będzie.

98. *Zagádn:* 2. Tróykąt dany zamienić na inny Prostokątny, któryby miáł tę samę Podstawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie. Przez wierzchołek Tróykąta danégo, poprowádzmy równoległą od Podstawy, a od końca któregokolwiek teyże podstawy, wynieśmy prostopadłą aż do równoległéy; Punkt przecięciá tych dwóch liniy będzie wierzchołkiem Tróykąta szukanégo.

Podobnym sposobém postąpimy sobie chcąc zamienić Tróykąt dany na drugi równy mu w Podstawie i w Powierzchni: gdy inny a nie prosty kąt przy Podstawie dadź będzie potrzeba tému drugiému Tróykątowi.

99. *Zagádn:* 3. Zamienić Tróykąt dany, na Rownoległobok prostokątny, któryby miáł álbo tę samę co Tróykąt podstawę, albo tę samę wysokość.

Rozwiązanie. Równoległobok prostokątny, któryby miáł tę samę podstawę, i wysokość, co Tróykąt; byłby dwa razy tak wielki; a zatém Równoległobok ten, którégo szukámy, powinién mieć tę

samę

samę podstawę, co Tróykąt, a połowę iego wysokości; albo też tę samę wysokość, a połowę tylko Podstawy.

100. *Zagádn:* 4. Czworokąt dany zamienić na Tróykąt téyże saméy powiérzchni.

Rozwiąz: Poprowádźmy w Czworokącie danym przekatną, a przez wiérzchołek iednego z kątów iéy przeciwnych, pociągniymy równoległą od teyże przekątnéy. Wszystkie Tróykąty maiące za podstawę tę przekątną Czworokąta, a wiérzchołek na równoodległéy od téy przekątney będą równé w Powierzchni Tróykątowi, który czyni tą przekatná z dwoma bokami Czworokąta schodzącémi się na równoodległey (96.) a zatém będzie też równy w powiérzchni temu Tróykątowi, i Ttóykąt maiący za Podstawę tę samę co i tamtén przekątną, a za bok iedén maiacy przedłużénié aż do równoległéy, boku Czworokąta leżącégo z drugiéy strony przekątnéy; tén Tróykąt ostatni dodáwszy do Tróykąta z drugiéy strony przekątnéy leżącégo, zrobi się Tróykąt równy co do powiérzchni Czworokątowi danému: bo ponieważ Tróykąty dwa, na które iest Czworokąt przez przekątną podzielony, równaią się co do powiérzchni całému Czworokątowi; więc tému Czworokątowi równy także będzie co do powiérzchni i Tróykąt przez przekątną w Czworoką-

rokącie uczyniony: a drugi równy w powierzchni Tróykątowi drugiému wchodzącemu także w Czworokąt i onégo dopełniaiącému.

Niech będzie naprzykład ABCD Czworokąt dany; poprowadziwszy przekątną BD, i od niéy równoległą CE, przez wierzchołek C, kąta DCB; gdy bok AB Tróykąta drugiégo w Czworokącie pociągniemy aż do zeyściá się z równoodległą CE w punkcie E; zrobi si Tróykąt ADE równy co do powiérzchni Czworokątowi ABCD. Táb. VI. *Fig.* 2.

101. *Uwága.* Tym sposobém postąpimy sobie, chcąc zmnieyszyć iednym bokiém Figurę iaką prostokréślną, bez odmieniéniá iéy powierzchni. Poprowadzimy naprzód przekątną, którąby odcięła Tróykąt ieden w Figurze podanéy; potém przez wiérzchołek tego Tróykąta pociągniémy równoodległą od téy przekątnéy, aż do zeyściá się téyże równoodległey z bokiem drugim przyległym do przekątnéy; naostatek złączymy punkt przecięciá z drugim końcem téyże przekątnéy.

Możná nawet użyć sposobu tego do zamiéniéniá iakiéykolwiek Figury prostokréślnéy, na Tróykąt téyże saméy, co i podaná Figura powiérzchni; a to zmnieyszaiąc naprzód iednym bokiém Figurę podaną: potém odeymuiąc znowu

bok iedén, zmnieyszonéy iuż iednym bokiém Figurze i t. d. póty, poki do trzech tylko boków, toiest do Tróykąta nie przyydziémy.

Tab. VI. Fig. 3. *Przykład*. Niechby trzeba zamiénić Pięciokąt ABCDE na Tróykąt téyże saméy powiérzchni.

Poprowádźmy przekątné: DB, DA, przez C i E pociągniymy równoodległé CG, EF, aż do ich zeyściá się z liniią AB przedłużoną w Punktach G i F: złączmy tę punkta z końcami przekątnych, przez DG i DF. Tróykąt DFG bedzie równy w powiérzchni Pięciokątowi danému.

102. *Wniosek*. Widzieliśmy, (99.) że Tróykąt może bydź zamiéniony na Równoległobok prostokątny, maiący tę samę co i Tróykąt powiérzchnią; a zatém možná każdą Figurę prostokréślną zamiénić zawsze na prostokąt nie różniący się od niéy w powiérzchni, mogąc ią piérwéy zamiénić na Troykąt.

103. *Uwaga*. Niechby nám podano dwie iakié Figury prostokréślné, którébyśmy iuż zamienili obiedwie na Prostokąty; i niechby té dwa prostokąty miały albo podstawy, albo wysokości równe. Łatwo nam będzie zrobić taki znowu prostokąt, któryby równy był

w po-

w powiérzchni, summie albo różnicy tych dwóch Figur podanych. Prostokąt albowiém, któryby miał podstawę równą summie albo różnicy Podstáw w obudwóch mnieyszych Prostokątach (gdyby ich wysokości były rowne), i tę samę co oné wysokośc, byłby równy w powiérzchni summie tych Figur, lub ich różnicy. Wkrótce się także pokaże, iż można zamiénić Prostokąt ieden na drugi, któryby był piérwszemu równy w Powiérzchni, a miał w sobie bok ieden dany: a zatém można zawsze dwa Prostokąty do tego przyprowadzic, aby miały iedén bok równy w obudwóch; przeto można zawsze i Prostokąt taki zrobić, któryby równy był w powiérzchni dwóm albo więcéy Figuróm prostokréślnym podanym.

104. *Twiérdz:* 5. W jakimkolwiek Prostokącie, poprowadziwszy przekątną, przez iéy punkt którykolwiek pociągnąwszy dwie równoodległé od boków prostokąta, będą równé w powiérzchniach dwa prostokąty, przez té równoodległé zrobioné, a stykaiącé się w wiérzchołku dwóch kątów przeciwnych.

Niech będzie Prostokąt ABCD, przez punkt E, przekątnéy poprowadziwszy równoodległe: HF, GI; Prostokąty HEGD, FEIB będą rowné w powierzchniach. Tab. VI. Fig. 4.

Dowodz: Tróykąty ACD, CAB, są równé. Piérwszy składá się z Tróykątów CEG, EAH, i z Prostokątá HEGD. Drugi składá się z Tróykątów ECF, AEI, i z Prostokąta FEIB. Aże Tróykąt CEG, równy iest Tróykątowi ECF, a Tróykąt EAH, równy Tróykątowi AEI; więc i Prostokąt HEGD, równy będzie Prostokątowi EFIB.

Twiérdzeniá podobnégo poprzedzaiącému, gdy równoległobok nie będzie prostokątny, tymże samym sposobem dowiéśdź można.

105. *Zagádn:* 5. Dany Prostokąt zamiénić na inny téyże samcy powiérzchni, któryby miał za bok, liniią daną.

Táb. VI. *Fig.* 5. Niech będzie Prostokąt ABCD; tén zamiénić trzeba na inny, w ktorymby liniá daná za bok służyła.

Rozwiąz: Pociągniymy daléy bok AB, aż do E, tak, aby liniiá BE. równá była linii danéy. Dopełniymy Prostokąta BEFC, i poprowádźmy przekątną FB, którąby spotkała w punkcie G, bok przedłużony AD; weźmy potém FI, równą DG, i złaczmy punkta G, i I, liniią GI. To uczyniwszy, Prostokąt EBHI, równy będzie co do powiérzchni Prostokątowi ABCD, i za bok ma liniią daną BE. Że równé są té dwa Prostokąty, można okázáć

zać podobnym iak w ostátnim twiérdzéniu sposobém.

106. *Uwága* 1. Aby dodadź dwa Prostokąty maiącé boki odmiénné; trzeba naprzód iedén z tych prostokątów zamiénić na inny równey z nim powiérzchni, i któryby miał bok iedén równy bokowi prostokąta drugiégo nie zamienianego. Wziawszy potém za wysokość, tén bok równy w dwóch Prostokątach, a za Podstawę, summę dwóch innych boków odmiénnych; zrobi się Prostokąt równy co do powiérzchni summie dwóch Prostokątów danych. Podobnie się postępuie, chcąc mieć ich różnicę.

107. *Uwága* 2. Gdyby Prostokąty dané były Kwadratémi, a Prostokąt równy ich summie miał téż bydź Kwadratém; poprzedzaiace wiadomości nie dosyć byłyby na rozwiązanié tego zagádniéniá. Niżéy obaczymy, iak sobie w takim razie postąpić trzeba. (Obácz w Rozdz: VIII.)

108. *Przystósowanié*. Nie powtárzá się tu, co się iuż powiedziało w Arytmetyce o mierzeniu Prostokątów, których boki są w liczbach, wyrażoné. Przystósowanié teraźnieyszé sciągać się będzie do Równoległoboków iakichkolwiek, i do Tróykątów, wyrażaiąc podstawy ich i wysokości w liczbach.

Aby

Aby doyśdź powierzchni Czworokąta, którego przekątná i prostopadłá od wierzchołku kąta iey przeciwnego spuszczoná, w liczbach iest daná; trzeba rozmnożyć tę przekątną przez połowę summy obudwóch prostopadłych; albo połowę przekątney, przez summę tychże prostopadłych; albo nakoniec całą przekątną przez całą summę prostopadłych rozmnożyć, i rozmnożoney liczby wziąść połowę. Gdyby Czworokąt miał dwa boki równoodległe; powierzchniá iego byłaby równá Prostokątowi maiącemu za wysokość odległość tych dwóch Równoległych, a za Podstawę połowę summy dwóch boków przeciwnych Czworokąta, których wiemy odległość.

Tab. VI. Fig. 6. *Przykłady.* 1. Niech będzie ABCD, Równoległobok *Pochyłokątny* (obliquangulum) którego Podstawa AB, má długości łokci 37. a wysokość DE łokci 20; powierzchniá iego będzie 20 × 37.=740. łokci kwadratowych.

2. Niech powierzchniá Równoległoboku ABCD zawierá łokci kwadratowych 378. Podstawa AB, niech má długości łokci 27. wysokość DE, będzie $\frac{378}{27}$=14. łokci.

3. Niech będzie powierzchniá Równoległoboku ABCD=544. łokci kwadratowych; wysokość DE=17. łokci. Podstawa AB, będzie=$\frac{544}{17}$=32. łokci.

4.

4. Niech znowu Równoległoboku ABCD podstawa będzie łokci 23. stóp 1. cal. 10 toiest 23 $\frac{11}{12}$ łokci, wysokość DE łokci 14. stóp. 1. cál: 8. toiest 14.$\frac{5}{6}$. łokci; powierzchniá będzie 14.$\frac{5}{6}$. razy 23.$\frac{11}{12}$=354.$\frac{55}{72}$ łokci kwadr:=354.łok:kw: 3. stóp. 8. cál:

5. Niech powiérzchniá Równoległoboku ABCD będzie=8433. sznur: Kwad: 72. prętu kw:=8433. 72. sznur: kwad: podstawa AB=153. sznur: 9. pręt:=153. 9. sznur: wysokość DE, będzie=$\frac{8433,\ 72.}{153,\ 9.}$ =54, 8. sznur =54 sznur:8. pręt:

6. Niech powiérzchniá Równoległoboku ABCD, będzie=315, 3, 58. (Ł. K. St: kw. Cál: Kw:) =315.$\frac{245}{288}$. Ł. K. wysokość DE = 15. 1. 10. (Łok. St: Cál:) = 15.$\frac{11}{12}$ Łok: podstawa będzie=$\frac{90965.}{4584.}$ Łok: = 19. Łok. Stóp: 1. 8.$\frac{49}{191}$.Cál:

7. Niech będzie ABC Tróykąt, którego podstawa AB,=28 łokci, a wysokość CD=16. łokci. Powiérzchniá iego będzie połową 28. przez 16. rozmnożonych czyli =$\frac{28\times16.}{2}$=28×8.=224. Łok: kw: Táb. VII. *Fig. 1.*

8. Niech będzie powierzchnia Tróykąta ABC=156. stóp. kw: a podstawa AB=24. stóp. wysokość CD, będzie=$\frac{156}{\frac{1}{2}\times 24.}$=$\frac{312}{24.}$ albo $\frac{156}{12.}$=13. stóp.

9. Niech będzie powierzchnia Tróykąta ABC=195. Ł. kw: a wysokość CD=15. łokci. Podstawa AB będzie=$\frac{195}{\frac{1}{2}\times 15}$=$\frac{390}{15.}$=26. Ł. kw:

10. Niech będzie ABC Tróykąt, którego podstawa AB= 12 pręt:, 2 łok:, 4 cal. =12. $\frac{5}{18.}$ pręt: Wysokość=7.$\frac{5}{6}$ pręt: powierzchnia będzie =7.$\frac{5}{6.}$ × 6. $\frac{5}{36.}$= 48.$\frac{12}{216.}$ pręt: kw: =48. pręt: kw: 4. łok: kw: 3. stóp. 114. cál: kw:

11. Niech będzie powierzchnia Tróykąta ABC = 25. ł. kw: 32. cal: kw: = 25 $\frac{1}{8}$ ło: kw: podstawa AB = 9. Ł. 2. cal: 8. linii =9.$\frac{1}{9}$ Łokci. wysokość CD będzie =$\frac{451}{82.}$=5. ł. 1. sto:

12. Niech będzie powierzchnia Tróykąta=21. szn: kw: 17. pręt: kw: Wysokość

kość CD=5. szn: 8. pręt: podstawa AB. będzie=$\frac{21,\ 17.}{2,\ 9.}$ albo $\frac{42.\ 34.}{5,\ 8.}$=7, 3. szn: 7. szn: 3. pręt:

13. Niech będzie *Różnobok* (Trapezium) ABCD maiący tylko równoodległé boki AB, CD; - bok AB=35. łok. Táb. VII. *Fig.* 2.

bok CD=17. łok.

A zatém summa ich=52.
Wysokość DE = 14.
Powierzchniá tego Czworokąta będzie =$\frac{14\times 52.}{2.}$=7×52, albo 14.×26.=364. ł.kw:

14. Aby powiérzchniá takiégo Czworokąta zawierała 255. cal: kw: którégo boki dwa równoległé są:
iedén AB=23. cál:
drugi CD=11.

A zatém summa=34.
trzeba mu dadź wysokość=$\frac{255}{17.}$=$\frac{510}{34.}$= 15. cal.

15. Aby zaś powiérzchniá takiégo Czworokąta zawierała 325 Stóp: kw: gdy podstawa AB=31. stóp, a wysokość ED=13. trzeba, aby summa boków rónoodległych była=$\frac{325}{\frac{1}{2}\times 13.}$=$\frac{650}{13.}$=50. stóp. A że bok AB=31. stóp. więc CD będzie=19. stóp.

16.

16. Niech w takowym Czworokącie ABCD boki równoodległe będą ;

AB = 20. pr: 4. ło. 1. st. 6. cal.
CD = 13. 5. 1. 4.

A zatém summa = 34. 2. 1. 10. = 34.$\frac{[illegible]}{18}$ pręt:

Wysokość DE = 9. 5. 1. 8. = 9.$\frac{7}{19}$.

Powiérzchniá będzie = 9.[illegible] × 17.$\frac{[illegible]}{36}$ = 168.$\frac{10}{81}$ pręt: kw: 168. pręt: kw: 6. łok: kw: st: kw: 112. cal: kw:

Táb. VII. *Fig.* 3. 17. Niech będzie Czworokąt iakikolwiek ABCD, którego przekątna DB = 86. łokci ; prostopadłe zaś do niéy spuszczoné, - - AE = 39.
- - - CF = 25.
A zatém ich summa AE+CF = 64. łok:
Powiérzchnia tego Czworokąta będzie = $\frac{64 \times 86.}{2}$ = 32. × 86. albo 64. × 43. = 2752. łokci kw:

18. Niech znowu będzie przekątná AB = 26. szn: 8. pręt: 6. łok: = 26.$\frac{22}{25}$ szn:
Prostopadłe: AE = 13. szn: 7. pręt: 5. łok:
CF = 11. 9. 6. $\frac{1}{2}$.

A zatém AF+CF = 25. 7. 4. = 25.$\frac{113}{150}$ sznur:

Powiérzchniá Czworokąta ABCD będzie = 25.$\frac{113}{150}$ × 13.$\frac{11}{25}$ = 346.$\frac{78}{628}$ szn: kw:

19.

19. Niech w Pięciokącie ABCDE będzie bok - AE = 128. łok: Táb. VII. *Fig.* 4.

Przekątné: { AC = 79.
CE = 81.

Prostopadłé: { CH = 49.
BF = 42.
DG = 39.

Znáydziémy Powiérzchnie Tróykątów:

{ AEC = 49×64. = 3136. łok: kw:
ABC = 21×79. = 1659.
EDC = $\frac{39\times81.}{2.}$ = 1579. $\frac{1}{2}$.

A zatém Powiérzchniá Pięciokąta ABCDE będzie = 6374. $\frac{1}{2}$. ło: kw:

20. Niech w Sześciokącie ABCDEF będą Táb. VII. *Fig.* 5.

Przekątné. { AC = 200. łok:
AE = 125.

Prostopadłé (BG = 23.
DH = 80. $\frac{1}{2}$.
{ DI = 64. $\frac{3}{4}$.
FK = 42.

A zatém BG+DH = 103. $\frac{1}{2}$. łok:
DI+FK = 106. $\frac{3}{4}$.

Znáydziémy Powiérzchnie Czworokątów:

{ ABCD = 103. $\frac{1}{3}$. ×100. = 10350. ł. kw:
ADEF = 53. $\frac{3}{8}$. ×125. = 6671. $\frac{7}{8}$.

Po-

Powiérzchniá tedy' całégo

Sześciokąta będzie = 17021.$\frac{7}{8}$. łok: kw:

Inaczéy następuiącym sposobem znaleźć można Powiérzchnią Sześciokąta: ABCDEF.

Táb. VII. *Fig. 6.* Niech będzie

		szn:	pręt;	łok:	
	bok AB =	20.	0.	0.	
Równoodległe: Części prostopadłey DN.	FG =	23.	7.	3.$\frac{1}{8}$.	
	CH =	23.	2.	2.$\frac{13}{16}$.	
	EI =	12.	2.	2.$\frac{3}{16}$.	= 12.$\frac{11}{48}$. Sz:kw.
	DK =	1.	4.	7.$\frac{7}{24}$.	= 2.$\frac{179}{360}$.
	KL =	4.	6.	6.$\frac{1}{4}$.	= 4.$\frac{41}{60}$.
	LM =	1.	0.	3.$\frac{8}{4}$.	= 1.$\frac{1}{20}$.
	MN =	7.	8.	5.$\frac{5}{6}$.	= 7.$\frac{79}{90}$.

A zatém AB+FG = 43. 7. 3.$\frac{1}{8}$. = 43.$\frac{8[illegible]}{20}$.

FG+CH = 46. 9. 5.$\frac{15}{16}$. = 46.$\frac{47}{48}$.

CH+EI = 35. 4. 5. = 35.$\frac{5}{17}$.

Więc Tróykąt DEI = $1\frac{179}{720} \times 12\frac{11}{48}$ =

15.$\frac{9313}{3.560}$. szn: kw:

Czwo-

Czworokąty.
$\begin{cases} EICH = 2.\frac{41}{120} \times 35.\frac{7}{15} = 83.\frac{23}{450}. \\ CHFG = 1.\frac{1}{20} \times 23.\frac{47}{96} = 24.\frac{85}{128}. \end{cases}$
$\begin{cases} ABGF = 3.\frac{169}{180} \times 43.\frac{89}{120} = 172.\frac{6341}{21600} \\ \end{cases}$
Sz: kw:

Cały więc Sześciokąt $ABCDEF = 295\frac{641}{2304}$.

21. Niech będzie Siedmiokąt ABCDEFG, w którym następuiące wymiary znaleźliśmy toiest; Tab. VIII. Fig. 1.

Części przekątney AD: $\begin{cases} AH = 32\frac{2}{3} \\ HI = 35. \end{cases}$ stopy
$\begin{cases} IK = 15.\frac{1}{3}. \\ KL = 81.\frac{5}{6}. \end{cases}$
$\begin{cases} LM = 11.\frac{5}{6}. \\ MD = 13.\frac{1}{3}. \end{cases}$

Prostopadłe: $\begin{cases} GH = 78.\frac{1}{2}. \\ BI = 56.\frac{1}{3}. \end{cases}$
$\begin{cases} FK = 64. \end{cases}$
$\begin{cases} EL = 86.\frac{1}{3}. \\ CM = 45.\frac{1}{6}. \end{cases}$

stóp: kw:

Będą

Będą tedy Tróykąty:

$AHG = 16.\frac{1}{3} \times 78.\frac{1}{2} = 1282.\frac{1}{6}$

$ABI = 28.\frac{1}{6} \times 67.\frac{1}{3} = 1905.\frac{17}{18}$

$DLE = 43.\frac{1}{6} \times 25.\frac{1}{6} = 1086.\frac{13}{36}$

$CMD = 6.\frac{2}{3} \times 45.\frac{5}{6} = 305.\frac{5}{9}$

czworokąty:

$HKFG = 25.\frac{1}{6} \times 142.\frac{1}{2} = 3588.\frac{1}{4}$

$KLEF = 81.\frac{5}{6} \times 75.\frac{1}{6} = 6151.\frac{5}{36}$

$BCMI = 109. \times 51.\frac{1}{12} = 5568.\frac{1}{12}$

A zatém cały Siedmiokąt ABCDEFG = $19885.\frac{1}{2}$ st: p: kw:

PRZYGOTOWANIÉ DO ROZDZIÁŁÓW NASTĘPUIĄCYCH

O podniesiéniu liczby do Kwádratu i wyciągniéniu z niéy piérwiástku kwádratowégo.

Lubo nauka, którá się tu wykładać będzie, má częsté używanié w wyższych rachunkach; bardziéy iednak iest potrzebná w Geometryi. W następuiących Rozdziáłach, różné zdarzą się użyciá iéy okoliczności. Tam fundaménta, na których się zasádzá, iaśniéy zrozumiané będą, niż gdyby na zawilszych działaniach rachunkowych były okázané zwłá-

zwłászcza, gdy ieszcze algiebra uczniom iest nieznaiomá.

109. *Defin:* Kwadrat liczby; iestto ta sama liczba przez siebie rozmnożona. Okázać to możná z Geometryi, w któréy aby znaléźć pole Kwadratu; trzeba rozmnożyć przez siebie liczbę znaczącą wielkość boku tegoż Kwadratu.
I tak dziewięciu liczb piérwszych:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Kwadraty są:
1.	4	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	
10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.	Liczb: kwadraty są:
100.	400.	900.	1 600.	2 500	3 600.	4 900.	6 400.	8 100	
1 000.	2 000.			3 000			9 000.		Tych też kwadraty będą.
1 000 000.	4 000 000.		9 000 000.				81 000 000.		

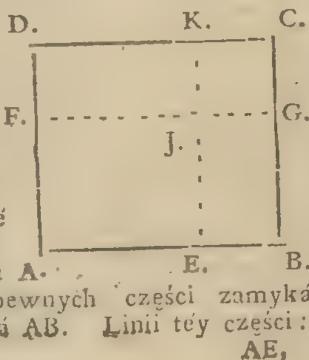
110. Stąd się wnosi, że kwadraty liczb, które iednę cyfrę maią, a resztę zerów, składaią się z kwadratu téyże saméy cyfry, i z tylé dwoie następuiących zerów, ilé ich było w téy liczbie.

111. Gdy się robi Kwadrat z liczby, naprzykład z 37, mnożąc 37. przez 37; mnoży się naprzód 7. przez 7. toiest robi się Kwadrat z 7. potém mnoży się 30. przez 7. daléy 7. przez 30. albo drugi ráz znowu 30. przez 7. naostatek mnoży się 30. przez 30. toiest bierze się Kwadrat z 30. Jest tedy liczba rozmnożoná 1369. kwadratém trzydziestu siedmiu, złożonym z kwadratu trzydzie-

stu,

stu, z liczby 30. rozmnożoney dwa razy przez 7. i z kwadratu 7. Ta reguła iest ogólna ściągaiącá się do kwadratów liczb wszystkich, które na dwie części podzielić można.

Niech będzie naprzykład liczba 5. którą uważam iak złożona z 1. i z 4. kwadrat iey może bydź uważany, iakby się składał z tych trzech liczb: 1. 8. 16. Pierwsza 1. iest kwadratem z 1. druga 8. iest liczbą rozmnożoną dwa razy z 1. przez 4. trzecia 16. iest kwadratem z 4. Jakoż summa tych trzech liczb 1. 8. 16. iest: 25. a 25. iest kwadratem z 5. Gdybyśmy uważali 5. iako zbiór z tych dwóch liczb 2. i 3; kwadrat z 5. brałby się tem samem za summę z tych trzech liczb: 4. 12. 9. która summa iest także 25. Liczba 4. byłaby kwadratem z 2. liczba 12. byłaby z rozmnożenia dwa razy 2. przez 3, a liczba 9. byłaby kwadratem z 3.



Toż samo widocznie pokázać się może sposobem Geometrycznym.

Niech liniia AB będzie na mieyscé liczby iakiéy składaiącéy się z tylu iedności, ile pewnych części zamyka w sobie taż liniia AB. Linii téy części: AE,

AE, EB, niech zastępuią części dwie, które tę liczbę składaią: zróbmy kwadrat ABCD z linii AB, a wziąwszy liniią AF równą AE, pociągniymy przez F i E dwie liniie FG, i EK, równoodległé od boków kwadratu, i przecinaiącé się w punkcie J. Kwadrat AEIF. będzie z części AE, linii AB. Kwadrat IGCK, będzie z części EB, linii téyże AB. Prostokąty: FIKD, EBGI, będą obadwa z linii: AE i EB, toiest z części iednéy, linii AB i z części drugiéy.

112. Wygodná rzecz iest, liczbę, któréy kwadratu szukámy, rozłożyć na iedności, dziesiątki, sta, i t. d.

Przykład 1. Chcę mieć kwadrat z 24.

Rozkłádám tę liczbę na dziesiątki, i na iedności, toiest na 20. i na 4.

Będzie 1. 400. kwadrat z dziesiątków.
2. 160. liczba dwa rázy rozmnożoná z dziesiątków przez iedności.
3. 16. Kwadrat z jedności.
Summa - - 576. Kwadrat z 24.

Przykład 2. Chcę mieć kwadrat z 36.

1. 900. Kwadrat z 30.
2. 360. dwa razy 30. przez 6. rozmnożoné.
3. 36. Kwadrat z 6.
Summa - - 1296. Kwadrat 36.

Przykład 3. Chcę mieć Kwadrat z 324.

1. 90000. Kwadrat z 300.
2. 12000. Dwa razy 300. przez 20.
3. 400. Kwadrat z 20.
4. 2560. Dwa razy 320. przez 4.
5. 16. Kwadrat z 4.

Summa - - - 104976. Kwadrat z 324.

Przykład. 4. Chcę mieć Kwadrat z 4687.

1. 16000000. Kwadrat z 4000.
2. 4800000. Dwa razy 4000. przez 600.
3. 360000. Kwadrat z 600.
4. 736000. Dwa razy 4600. przez 80.
5. 6400. Kwadrat z 80.
6. 65520. Dwa razy 4680. przez 7.
7. - - 49. Kwadraty z 7.

Summa - - - 21967969. Kwadrat z 4687.

113. *Uwaga* 1: Postrzédz łatwo możémy w tych przykładach, że każda liczba składaiącá po części kwadrat cały, má iednem zero mniey, niżeli ta, która ią poprzedziła; a zatém cyfra iedna w każdey liczbie niższey występuie bardziey ku prawéy ręce, niż w téy, która iest nad nią.

Wi-

Widzimy zatém, że możnáby opuścić zera, pisząc cyfry samé tym sposobém iedné pod drugiémi, aby w każdym rzędzie niższym, cyfra iedna w prawą coraz bardziéy wychodziła. I tak opuściwszy zera w przykładzie ostatnim tym porządkiém szłyby samé cyfry.

16.
48.
36.
736.
64.
6552.
49.

Summa 21 967 969.

2. W piérwszym rzędzie, gdzie iest 16. opuszcza się zerów sześć, a zatém 16. znaczy 16. milliionów, toiest Kwadrat z 4000. czyli z piérwszégo po lewéy ręce znaku liczby 4687. W drugim rzędzie gdzie iest 48. opuszczá się zerów pięć, a zatém 48. znaczy 4. milliiony 8. kroć stotysięcy, i dlá tego 4. piszą się pod iednościami milliionów, a 8. występuie. Ta zaś liczba 48. pochodzi z rozmnożéniá piérwszégo po lewéy ręce znaku 4, liczby 4687. przez drugi znak 6, téyże liczby dwa razy wzięty. W trzecim rzędzie opuszczá się zerów cztéry, a zatém 36. znaczy trzykroć sto tysięcy, i 6. dziesiątków tysięcy, i dlá tego 3. piszą się pod stuma tysiąców, a 6. wy-

stępuie. Ta zaś liczba 36. znaczy kwadrat drugiego po lewéy ręce znaku 6. liczby 4687. W czwartym rzędzie opuszczá się zerów trzy, a zatém 736. znaczy siedmkroć trzydzieści sześć tysięcy: i dla tego 3. piszą się pod dziesiątkami tysiąców, a 6. występuie. Ta zaś liczba 736. pochodzi z rozmnożeniá dwóch piérwszych po lewéy ręce znaków 46. liczby 4687, przez 8, trzeci znak teyże liczby dwa razy wzięty i t. d.

3. W takowém liczb ułożeniu, idąc od dołu do góry, toiest zaczynaiąc od 49; w piérwszym rzędzie, piérwszá po prawéy ręce cyfra 9. znaczy iedności; w drugim rzędzie 2. znaczy dziesiątki: w trzecim rzędzie 4. znaczy sta: a w czwártym rzędzie 6. znaczy tysiące, i t. d.

4. Ta sama liczba 49. w piérwszym od dołu rzędzie znaczy kwadrat z iedności 7; i prawá iéy cyfra 9. náybardziéy występuie. Trzeciá w tym porządku liczba 64. iest kwadratém z dziesiątków 8, i przeto prawá iéy cyfra 4. iako znacząca sta, mniey występuie, niżeli obiedwie cyfry 49. kwadratu z samych iedności. Piąta w porządku liczba 36. iest kwadratém ze stów 6: i przeto prawá iéy cyfra 6. iako znacząca dziesiątki tysiąców, má przed sobą kwadraty z dziesiątków i z iedności. Na koniec siódmá i náywyższá

liczba

liczba 16. iest kwadratém z tysiąców 4. i przeto prawá iéy cyfra 6. má przed sobą kwadraty ze stów, dziesiątków i iedności. W summie więc 21,967,969. na mieyscach nie párzystych, od prawéy ręki rachuiąc kończyć się będą kwadraty z liczb poiedyńczych, z których się skłádá cały kwadrat: to iest kwadrat z iedności kończyć się będzie tam, gdzie ostatnié po prawéy ręce 9. napisané: kwadrat z dziesiątków tam, gdzie iest drugié 9; kwadrat ze stów tam, gdzie iest 6; kwadrat z tysiąców, gdzie 1.

5. Dlá podobnéy przyczyny w summie téyże 21 967 969. kwadrat wyrážaiącéy (rachuiąc zawsze od prawéy ręki) na mieyscach párzystych, drugiém, czwártém, szóstém i t. d. kończyć się będą liczby pochodzącé z rozmnożéniá poiedyńczych znaków, z których kwadrat urósł, przez té wszystkié, któré ié poprzedzały.

Trzeba to ieszcze bardziéy obiaśnić na wielu innych przykładach kwadratów, tymże samym, co wyżey, porządkiém części ich układaiąc.

114. *Wniosek* 1. Gdy tedy mámy liczbę iaką kwadratową, możémy doyśdź z jak wielu znaków liczebnych przez siebie rozmnożonych urósł tén kwadrat: toiest, możémy doyśdź wielości znaków pier-

piérwiástku kwadratowego. Po Łacinie taki piérwiástek zowié się (*Radix quadrata.*) Doydziémy zaś tego, oddzielaiąc kréskami albo kropkami od prawéy ręki zaczawszy po dwa znaki liczebné. Liczba takich oddziałów pokáże wielość znaków liczebnych piérwiástku. Naprzykłád liczba 576, będzie miała dwa oddziáły, któré tak oznáczám 5, 76. a zatém piérwiástek iéy z dwóch się skłádá znaków. Piérwiástek téy liczby: 10,49,76. będzie miáł trzy znaki liczebné, bo w niey trzy oddziáły zrobic możná. Piérwiástek liczby 21 967 969. mieć będzie cztéry znaki; bo cztéry także w nim oddziáły uczynić możná, i t. d.

115. *Wniosek* 2. Ponieważ w mieyscach nie-párzystych liczby kwadratowéy, kończą się kwadraty znaków poiedynczych tę liczbę składaiących, mogą zaś znaki liczebné w kwadracie bydź nie parzysté; więc w takim razie, w pierwszym zaráz od lewéy ręki znaku kwadratu, znaleźć możná znak piérwszy piérwiástku tegoż kwadratu: a zatém oddzielaiąc kréskami co dwie liczby, od prawéy ręki do lewey, na ostatni oddział, może tylko przypaśdź znak ieden liczebny. Tak, iakeśmy wyżéy widzieli w tym kwadracie 5,76.

PRZY-

PRZYKŁADY.

116. Niechby z tey samey liczby: 576. wyciągnąć trzeba było pierwiastek kwadratowy. Ta liczba mogąc mieć dwa oddziały, będzie też miała dwa znaki w pierwiastku, toiest znak dziesiątków, i znak iedności. Pierwszy znak pierwiastku taki bydz powinien, aby kwadrat iego nie przechodził 5. stów: taki kwadrat iest 4. sta, albo 400, ktorego pierwiastek 2. dziesiątki, albo 20. Kwadrat 400. pierwszego tego znaku pierwiastkowego 20, odiąwszy od 576. zostanie 176. Ta reszta pozostała powinna ieszcze zamykać w sobie drugi znak pierwiastku rozmnożony przez pierwszy 20, dwa razy wzięty, i nad to kwadrat tegoż drugiego znaku: więc ieżeli przez tenże znak 20, dwa razy wzięty, toiest przez 40. podzielimy resztę 176; wieloraz pokaże drugi znak pierwiastku złożony z iedności. Podzieliwszy 176, przez 40. wieloraz będzie 4. iedności. Te 4. iedności rozmnożywszy przez 40, wypadnie 160, ktore 160, odiąwszy od 176. zostanie 16. W tey reszcie 16. znaydować się ieszcze powinien kwadrat znaku pierwiastkowego iedności 4. toiest 16. a że się znayduie zupełnie; więc cały pierwiastek kwadratu 576. będzie 24.

Wzór

Wzór działania.

```
     5,76|20.
     4 00 kwadrat z 20.
   ________
  40| 176|4.
    | 160 z rozmnożénia 40 przez 4.
    ______
       16. Reszta.
       16. Kwadrat z 4.
       ___
        0.
```

Tymże sposobém wyciągnąć można piérwiástek kwadratowy z téy liczby 144.

Wzór działania.

```
     1,44|10.
     1 00 kwadrat z 10.
   ________
  20|  44 |2
    |  40 z rozmnożénia 20. przez 2.
    _______
        4. Reszta
        4. Kwadrat z 2.
        __
        0.
```

Niechby potrzeba wyciągnąć piérwiástek, z kwadratu : 692224.

Oddzieliwszy, iak wyżéy, kréskami co dwie liczby od prawéy ręki, będzie trzy oddziáłów, a zatém i trzy znaki w piérwiáftku. Kwadrat náybliżéy przystępuiący do 69. iest 64, ktorégo piérwiástek iest 8; więc 8 stów, będzie znakiém piérwszym piérwiaftku. Odiąwszy kwadrat 8. ftów, toiest 640 000. od 692 224.zostanie 52 224.

Ta

Ta reszta powinná zamykać piérwszy znak 800 piérwiástku dwa razy wzięty, przez drugi znak dziesiątków rozmnożony, i kwadrat drugiégo znaku piérwiástku: powinná ieszcze zamykać dwa té piérwszé znaki stów i dziesiątków rozmnożonych przez trzeci znak iedności dwa razy wzięty, i nakoniec kwadrat znaku tegoż iedności. W szczególności zaś mówiąc, powinná zamykać 800. dwa razy wzięté, toiest 1600. rozmnożoné przez znak dziesiątków którégo szukámy. Podzieliwszy tedy 52 224, przez 1 600. znáydziémy na wieloráz 30, albo 3. dziesiątki: a zatém 3 dziesiątki będą znakiém drugim Piérwiástku. 1 600. rozmnożoné przez 30. czynią 48 000, któré od 52 224 odiąwszy, zostanie 4 224. Ta reszta má ieszcze zamykać kwadrat z 30, toiest 900, któré 900. od 4 224. odiąwszy, zostanie 3 324.

Ta reszta powinná zamykać część piérwiástku znalezioną 830, dwa razy wziętą, i rozmnożoną przez znak iedności piérwiástku, i ieszcze zamykać powinná kwadrat tychże iedności. Podzielmy więc 3 324. przez 1 660. toiest przez 830. dwa razy wzięté, a wieloráz 2. będzie znakiém iedności piérwiástku. Przez té 2. rozmnożywszy 1 660, i liczbę rozmnożoną: 3 320. odiąwszy od 3324. zostanie 4, która to reszta iest kwadratém z 2. iedności. Cały więc piérwiástek kwadratu: 692 224. będzie 832.

Wzór

Wzór dzialaniá.

```
        692 224.|800.
        640 000
        --------
1 600.| 52 224|  30
        48 000
        ------
         4 224
           900
        --------
1 600|   3 324|2
         3 320
        ------
             4
             4
            --
             0
```

Trzeba iako náywięcey takich przykładów Uczniom podáwać, nieużywaiąc żádnego ieszcze skróceniá. Na wzór dwa się następuiące przykłady podaią.

Przykład I.

```
         46,02,26,56|6000.
         36 00 00 00|
         -----------
12000 |10 02 26 56|700.
         8 40 00 00
        -----------
         1 62 26 56
           49 00 00
        -----------
13400 |1 13 26 56|  80
        1 07 20 00
        ----------
           6 06 56
             64 00
        ----------
13560 |  5 42 56|4
         5 42 40
        --------
              16
              16
              --
              0.
```

Przykład II.

```
         13,59,39,69|3000
          9 00 00 00
         -----------
6000 |  4 59 39 69|600.
        3 60 00 00
        ----------
          99 39 69
          36 00 00
        ----------
7200 |63 39 69|80
       57 60 00|
       --------
        5 79 69
          64 00
       --------
7360 |5 15 69|7.
      5 15 20
      -------
           49
           49
           --
            0
```

117. *Uwága.* Jako w dzieléniu zwyczayném, tak i w wyciąganiu Piérwiástku kwadratowégo, można się (kto ieszcze nie iest wprawnym) łatwo pomylić w znakach wie orazu. Omyłka w dzieléniu łatwá iest do poprawiéniá, gdy uważać będziémy, ieżeli liczba dzieląca rozmnożoná przez wieloráz odiąć się może od części liczby podzielnéy, którą dzielić przypádá, albo ieżeli reszta nié iest większá od liczby dzielącéy. W wyciąganiu Piérwiástku kwadratowégo, (które wychodzi na iedno prawie co i dzieléníé w którémby liczba dzieląca co ráz się odmiéniała) można także omyłkę iakąkolwiek postrzedz podobną, iak przy zwyczáyném dzieléniu; czyniąc uwágę, wzgląd ieszcze i na to mieć należy, że wyciągaiąc piérwiástek sposobém wyżéy podanym, dwa się czynią odcymowania, toiest: odeymuie się naprzód liczba dzieląca przez część przypadaiącą Piérwiástku rozmnożoná, i powtóre odeymuie się kwadrat téyże części Piérwiástku: więc, gdyby zdarzyło się, że piérwsze tylko odięcie uczynić można, a drugiégo iuż nié można; ostrzeżéni tém bylibyśmy, żeśmy wzięli wieloráz bardzo wielki, á zatém zmnieyszyć go potrzeba. W ostatnich dwóch przykładach, w piérwszym, 12000, zmieścić się mogło razy 800 w 10022656; a w drugim 6000. mogło się znáydować 700 razy w 4593969: ale nié możnáby było od reszty odiąć kwadraty tychże wielorazów, i przetośmy

w obu-

w obudwóch tych przykładach iednością wieloráz zmnieyszyli.

118. *Piérwszé.* Skrócénié, którégo przy wyciąganiu Piérwiástku kwadratowégo użyć można, ieſt w opuszczéniu zerów w liczbie dzielącéy, podzielnéy, i w wieloraziе, zachowuiąc iednak cyfróm pozoſtałym té mieysca, któréby zastępować powinny, gdyby zera odcięté nie były.

119. *Powtóré*: Ponieważ ostatnié po prawéy ręce znaki kwadratu podanégo dó wyciagania Piérwiástku, wcale się nieodmiéniaią, po piérwszych odeymowaniach; nie są więc do nich potrzebné; zatém do każdégo w szczególności odeymowaniá, można té tylko cyfry spuszczać z kwadratu, od których odeymować przypádá liczbę dzielacą przez wieloráz rozmnożoną; zachowuiąc im mieyscé i znaczénié to samo, któré miały w całym kwadracie.

120. *Potrzecié.* Zamiáſt dwóch odeymowań, naprzód liczby dzielącéy przez wieloráz rozmnożonéy, potém kwadratu tegoż wielorazu, można obadwa ſrazém czynić odeymowaniá: kładąc znak znaleziony na wieloráz, nie tylko na zwyczaynéм swoiém mieyscu; ale téż przy końcu liczby dzielącéy, i dopiéro tak powiększoną liczbę dzielącą mnożyć przez tén znak wielorazu, a rozmnożoną od liczb przypádaiących z kwadratu odeymować. Tu

Tu na tych samych liczbach kwadratowych, z których, iuż uczniowie wyciągali piérwiastek, niecháy użyią tych trzech sposobów skrócénia: bo im iuż i działanié będzie łatwieyszé, i lepiéy dokładność tego sposobu skroconégo obáczą, porównywaiąc działanié piérwszé z drugiem.

121. Wyciągniymy tym skróconym sposobém piérwiástek kwadratowy z liczby 13593969.

Naprzód oddzielić trzeba kréskami co dwie liczby: iak wyżéy: oddzieliwszy tak liczby kwadratu podanégo 13,59,39,69. widzimy, że tén kwadrat cztéry znaki liczebne mieć będzie w swoim Piérwiástku. Kwadrat náybliższy w piérwszym po prawéy ręce oddziele zawarty, będzie 9, którégo Piérwiástek, 3. znaczący tysiące. Odiąwszy tén kwadrat 9. od 13. zostanie 4. do których przypisáwszy oddział następuiący 59, będzie 459. Podwóymy pierwszy znak Piérwiástku 3. i będzie 6. Té 6, w piérwszych dwóch znakach 45, liczby 459, znalazłoby się razy 7: ale maiąc wzgląd, że kwadrat tego wielorazu nié mógłby się potém odiąć, połóżmy tylko 6, na mieyscu wielorazu, i przypiszmy ié także do 6. liczby dzielącéy. Rozmnożywszy 66. przez 6. i liczbę rozmnożoną 396, odiąwszy od 459, zostanie 63, do którey reszty przypiszmy oddział kwadratu na-

stępu-

stępuiący 39; i dzielmy daléy 6339, przez dwa znaki Piérwiástku znalezioné, 36, podwoiwszy ié, toiest, przez 72. 72 w 633 znáyduie się razy 8. Napiszmy 8. na wieloráz, i przypiszmy ié do liczby dzielącéy 72. Rozmnożywszy 728, przez 8, będzie 5824, któré odiawszy od 6339. zostanie 515. Dopiszmy do téy reszty, ostatni kwadratu oddziáł 69, i 51569. dzielmy przez podwóyna liczbę znaków Piérwiástku iuż znalezionych 368: toiest, przez 736. 736 w 5156, znáydziémy razy 7. Przypiszmy té 7. do 368, i do 736. Rozmnożywszy 7367. przez 7. i liczbę rozmnożoną 51569 odiąwszy od 51569 nic nie zostanie: a zatém kwadratu podanégo piérwiástek będzie: 3687.

Wzór dziáłaniá.

```
   13,59,39,69 | 3687.
    9
  ---------
  66|45,9
     396
    -----------
 728| 633,9
     5824
    -----------
7367.|5156,9
      51569
     --------
        0.
```

122. *Wniosek.* Ponieważ wyniesiénié jakiéy liczby do kwadratu iest to iedno, co rozmnożénié téy liczby przez siebie samę,

samę, czyli rozmnożénié dwóch liczb równych iednéy przez drugą kwadrat; więc ułomku iakiégo, będzie ułomek, którego licznik, iest kwadratém licznika tamtego, a mianownik kwadratém mianownika iego. I tak kwadrat z $\frac{1}{2}$, iest $\frac{1}{4}$ kwadrat z $\frac{1}{3}$. iest $\frac{1}{9}$. kwadrat z $\frac{2}{3}$, iest $\frac{4}{9}$; kwadraty ułomków $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$ są $\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$ i t.d.

Chcąc tedy wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z ułomka podanego, trzeba osobno wyciągnąć go z licznika i z mianownika. I tak Piérwiástki kwadratowé tych ułomków; $\frac{9}{16}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{25}{36}$ i t. d. są $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$. i t. d.

123. *Uwaga*. Gdy się trafi wyciągać Piérwiástek kwadratowy z liczby mieszanéy, toiest, złożoney z liczby całkowitey, i z ułomka; trzeba ią piérwéy obrócić na sám ułomek. Tak naprzykład chcąc wyciągnąć piérwiástek z 2. $\frac{1}{4}$. liczba ta będzie iedno co ułomek $\frac{9}{4}$. którégo piérwiástek $\frac{3}{2}$. czyli 1 $\frac{1}{2}$. Liczba téż: 2 $\frac{7}{9}$. iest iedno co $\frac{25}{9}$. a zatém piérwiástek iéy $\frac{5}{3}$. czyli: 1 $\frac{2}{3}$. Liczba 10 $\frac{6}{25}$. tylé znaczy co $\frac{256}{25}$. więc piérwiástek iéy: $\frac{16}{5}$. czyli 3 $\frac{1}{5}$.

O Jlościach niespółmiernych, i przybliżéniu Piérwiastków tych liczb, któré nie są kwadratami.

124. *Uwagi.* 1. Niech będzie liczba 2. z którey przypádá wyciągać Pierwiástek kwadratowy. Piérwiástkiém tey liczby nie będzie ani 1, ani 2; bo kwadrát z 1. iest 1, mnicy od 2. a kwadrat z 2, iest 4. więcéy od 2. Więc Piérwiástek z 2, będzie między 1. i 2, a zatém będzie złożonym z jedności, i z ułomka, toiest: będzie liczbą mieszaną, którą na sám ułomek obrócić można.

125. Aby ułomek tén był práwdziwym Piérwiástkiém z 2, trzebaby, aby kwadrat iego równáł się 2; a zatém aby kwadrat licznika iego był dwa razy większy od kwadratu mianownika. Znaleźcby tedy potrzeba taki kwadrat, któryby dwa razy w sobie zamykáł inny kwadrat: aże to iest nie podobná, zaráz się pokáże.

Każdá liczba kończyć się musi na iedén z tych dziesięciu znaków: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Każdy zaś kwadrat inaczéy kończyć się nie może, tylko na té znaki, na które kończą się kwadraty dziesięciu znaków dopiéro wyrażonych, toiest na:

1,

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0.
czyli krócéy, na 1, 4, 9, 6, 5, 0.

Kwadraty podwoioné nié mogą się inaczéy kończyć, tylko tak, iak się kończą liczby kwadratów ostatnié, podwoioné, toiest,na: 2,8,8,2,0,0,czyli krócéy na:2,8,0. A że piérwszé zakończénia na, 2,8, nie są zakończéniami kwadratów; więc kwadraty podwoioné, liczb zakończonych na: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, nié mogą bydź kwadratami. Jeżeli liczba zakończoná iest na iedno zero, toiest ieżeli iedén lub więcéy dziesiątków w sobie zupełnie zamyká: kwadrat iéy zamykać będzie takż liczbę stów, a zatém kończyć się będzie na dwa zera. Kwadrat zaś liczby kończącéy się na 5, kończy się na 25. a podwoiony, kończyć się będzie na iędno tylko zero, bo będzie kończył się na 50: więc tak podwoiony nie będzie kwadratém.

Nakoniec ieżeli liczba kończy się na iedno zero, 10 razy zamykać w sobie będzie liczbę zakończoną na iedén z dziewięciu piérwszych znaków: 1,2,3,4,5,6,7,8,9: a kwadrat iéy 100 razy zamykać będzie liczbę zakończoną na: 1,4,5,6,9, kwadrat zaś tén dwa razy wzięty, zamykać będzie 100. razy liczbę zakończoną na: 2, 8,0, a piérwiástek kwadratu tego dwa razy wziętégo, zamykać będzie 10. razy piérwiástek liczby zakończoney na iedén z tych trzech znaków: 2,8,0;

który to ostatni piérwiástek wyciągniony bydź nié może, iakośmy iuż okázali. Tego samégo rozumowania użyć możná gdy liczba kończyć się będzie na dwa, trzy, cztéry i t. d. zera.

Więc w szczególności mówiąc, Piérwiástek kwadratowy z liczby 2, wyciągniony bydź nié może.

126. To Dowodzénié stósowané bydź może do wszystkich liczb na 2. zakończonych. I tak nié można wyciągnąć Piérwiástku kwadratowégo z liczb: 12, 22, 32. 42, 52, 62. i t. d. czyli to w liczbach cáłkowitych, czyli w ułomkach, czyli w liczbach, mieszanych.

127. Podobnie dowieśdź możná, że niepodobná znaleźć pierwiástek kwadratowy liczby 3. ani żádnéy inncy na 3. kończącéy się. Tym, co wyżéy sposobém dowodzi się niepodobność wyciągnieniá Piérwiástku kwadratowégo z liczb kończących się na 5, 7, i t. d: a stąd możnaby ułożyć Táblicę bardzo obszérną liczb takich, których Pierwiástki kwadratowé w liczbach ani cáłkowitych, ani łámanych, zupełnie wyciągnioné bydź nié mogą.

128. Moznáby iednak i ogólnie dowieśdź, że wszystkie liczby cáłkowité, które nié maią Pierwiástku kwadratowé-

go

go w liczbach całkowitych; mieć go też nie będą i w liczbach łamanych. Kładzie się tu treść tylko tego dowodu:

Jeżeli dwie liczby są *pierwszémi* iedna względem drugiéy, (obacz w Arytmetyce na karcie 192.) ich kwadraty pierwszémi też będą ieden względem drugiégo; ponieważ dzielniki kwadratów pochodzą z dzielników ich Pierwiástków.

I tak, że liczby 2, i 3, są między sobą *pierwszémi*; pierwszémi są także między sobą i ich kwadraty: 4, i 9; że liczby 3. i 5. są między sobą pierwszémi: podobnież pierwszémi bądą i ich kwadraty 9. 25, Więc ieżeli dwie iakiekolwiek liczby są pierwszémi między sobą, ich kwadraty nie będą wielokrotné ieden drugiégo, toiest: ieden kwadrat nie będzie zupełnie w sobie zamykał drugiego.

Niech będzie liczba iaká cáłkowitá, którey nie można mieć Pierwiastku kwadratowégo w liczbach całkowitych. Gdyby ten Pierwiastek można zupełnie okázać w liczbie miészanéy; ta liczba miészaná, dałaby się obrócić na sám ułomek, a ułomek tén możnáby przywieśdź do náyprościeyszych wyrazów. Ale, aby ténże ułomek wyrażáł zupełny Pierwiastek; trzebaby, aby iego kwadrat był liczbą całkowitą, a zatém aby licznik tego ułomka kilka razy zupełnie większy był od

dzielnika iego, co ieſt nie podobná: więc, gdy liczbie iakiéy cáłkowitéy, nié można zupełnie znaléźć piérwiaſtku kwadratowégo w liczbie cáłkowitéy: nié można go téż znaléźć ani w ułomku.

129. Są więc takié niektóré Ilości (*Quantitates*) któré w liczbach dokładnie bydź wyrażoné nié mogą, ani nawet wyrazić można, iak się maią do iedności. Takié są té Ilości, któré przez siebie samé rozmnożoné, czyniłyby: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, i t. d. Te ilości nazywaią się *niespółmiernémi* (Jncommensurabiles, *albo* Jrrationales) piszą się naſtępuiącym sposobém. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$. i t. d. Znak ten $\sqrt{}$, czytá się *Piérwiáſtek* (Radix) naprzykład: $\sqrt{2}$, Piérwiáſtek dwóch, $\sqrt{3}$, Piérwiástek trzech, i t. d.

130. Gdy mówię, że tych Ilości wyrazić dokładnie nié można; przyduię zaraz, że ich dokładnie wyrazić nié można w liczbach; bo w jnny sposób można ie dokładnie wyrazić: Naprzykład: można zawsze naznaczyć dwie liniie, któréby się miały między sobą, iak 1, do Piérwiáſtku kwadratowégo liczby podanéy. I tak Przekątna kwadratu, má się do boku iednégo, iak się má Piérwiaſtek kwadratowy z 2, do 1. albo iak $\sqrt{2}$: 1. Wysokość także Tróykąta równobocznégo, tak się má do połowy Podstawy, iak $\sqrt{3}$: 1. i t. d.

131. Lubo w liczbach nié można dokładnie wyrazić Ilości niespołmiernych; można iednak ich wartość przybliżyć do prawdziwéy, i uchybienié zmnieyszyć tylé, ile zechcémy. Sposób do tego náysnadnieyszy ieſt przez użycié znaków *Dziesiątnych* do wyrażéniá takich Ilości.

Niech będzie podáná liczba 2, aby wyciągnąć z niéy Piérwiáſtek kwadratowy przez *przybliżénié* (per approximationem.)

Gdyby liczba podaná była razy 100, 10000. 1000000, i t. d. większá, iéy piérwiáſtek byłby téż większy razy 10, 100, 1000 i t.d. takdalece, że wyciągnąwszy piérwiáſtek z liczb 200, 20000, 2000000. i t. d. trzebaby piérwiaſtek tén dzielić przez 10, 100, 1000, i t. d. aby w nim uniknąć omyłki w częściach dziesiątych, setnych, tysiącznych i t. d. Przeto Piérwiaſtek kwadratowy, wyciągniony z 2, aż do cząſtek tysiącznych, znáydzie się wyciągaiąc go z liczby: 2000000.

Piérwiáſtek náybliższy z liczby 2000000 wyciągniony ieſt: 1414. a piérwiaſtek z liczby 2, przybliżony aż do $\frac{1}{1000}$. ieſt, 1, 414. Ponieważ kwadrat z 1, 414. ieſt 1,999396, i różni się od 2, tylko 0,000604.

Wzór

Wzór działaniá.

```
      2,00,00,00|1,414
      1
     24|10,0
         9 6
   281.|  40,0
          28 1
  2824|11 90,0
       11 29,6.
           60 4.
```

Gdybyśmy chcieli ieszcze bardziéy przybliżyć do prawdziwego, tén Piérwiástek, naprzykład żeby ani w cząstce $\frac{1}{10000}$. nie było uchybieniá; trzebaby ieszcze dwa zera przydadź, aby mieć iednym znakiém więcey w piérwiastku.

132. **Dlá spráwdzéniá, czyliśmy** w cząstce $\frac{1}{1000}$. nie uchybili, można położyć zamiast piérwiástku znalezionégo 1,414; liczbę: 1,415, a ta przez siebie rozmnożona uczyni kwadrat: 2,002225, większy od 2.

133. Częstokroć bardzo wygodnie i pretko wyciągnąć można z liczby piérwiástek przybliżony, w ułomkach zwyczaynych. Sposób tén zasadzá się na tém, że ieżeli liczba iest złożona z dwóch części, z których iedna iest bardzo wielká względém drugiéy; kwadrat téy licz- by

by będzie prawie złożony z kwadratu części większéy, i z podwoionégo rozmnożenia części pierwszey przez drugą; ponieważ kwadrat części mnieyszéy, iako bardzo mały, może bydź zaniedbany. I tak kwadrat liczby naprzykład 11, podzielonéy na dwie części: 10, i 1. będzie równy 100, toiest kwadratowi z 10, przydáwszy 10. przez 2 rozmnożoné, toiest, 20, i kwadrat części mnieyszéy: 1; a choćby tén ostatni kwadrat i opuścić; tedy iednak summa 120, małoby się różniła od kwadratu prawdziwégo 121.

134. Idzie stąd, że maiąc liczbę, z któréy przypádá wyciągać Piérwiástek złożony z dwóch części, z których iedna byłaby wielká, a drugá małá, ieżeli wiémy iuż tę część wielką, znáydziemy z niewielkiém uchybiéniém i część małą, podzieliwszy różnicę między liczbą podaną, i kwadratem części wielkiéy, przez tę samę część wielką dwa razy wziętą. To, co na wieloráz wypadnie, trzeba przydadź do wielkiéy części, gdy liczba podaná będzie większa od kwadratu części wielkiéy; albo odiąć od części wielkiéy, gdy kwadrat iéy większy będzie od liczby podanéy.

Niech będzie podaná do wyciągniéniá Piérwiástku, liczba 5. Piérwiástek iéy náybliższy w liczbie cálkowitéy, iest 2.

któ-

którégo kwadrat 4. Różnica między tym kwadratém i 5, iest: 1. Podzielmy tę różnicę 1. przez 2, dwa razy wzięté, toiest przez 4, i będzie $\frac{1}{4}$. A zatém Piérwiástek liczby 5. nie wiele uchybiony, będzie 2, $\frac{1}{4}$ albo $\frac{9}{4}$. Kwadrat z $\frac{9}{4}$. iest $\frac{81}{16}$. czyli 5. $\frac{1}{16}$. Podzielmy $\frac{1}{16}$. przez $\frac{9}{4}$. dwa razy wzięte, toiest przez $\frac{9}{2}$. wypadnie na wieloráz $\frac{1}{72}$. który odiąwszy od $\frac{9}{4}$. czyli od 2, $\frac{1}{4}$. zostanie 2 $\frac{17}{72}$. albo $\frac{161}{72}$. i tén będzie ieszcze bardziéy przybliżaiący się do práwdziwégo pierwiastek kwadratowy liczby 5. Jakoż kwadrat z $\frac{161}{72}$ iest: $\frac{25921}{5184}$. czyli 5 $\frac{1}{5184}$.

135. Chcąc porównać to przybliżénié z tém, któréśmy mieli w ułomkach dziesiątnych; obróćmy ułomek zwyczayny $\frac{161}{72}$. na ułomek dziesiątny, a znáydziémy: 2,2361. i t.d. Piérwiástek zaś liczby 5, w ułomku dziesiątnym byłby 2,2360. i t. d. A zatém różnica liczb w tém dwoiakiém postępowaniu, wydałaby się dopiéro w częściach dziesięć tysiącznych.

136. W piérwszém postępowaniu, kładzie się zamiást liczby podanéy, ułomek ze wszystkiém iéy równy, którégo dzielnik iest kwadratem z 10, z 100, z 1000.

z 1000. i t. d. Naprzykład zamiást 2, pisze się $\frac{200}{100}$. $\frac{20000}{10000}$. $\frac{2000000}{1000000}$. W drugiém postępowaniu, szukámy ułomka bardzo blizko równégo liczbie podaney. Którégo tak licznik, iako i mianownik, byłby zupełnym kwadratém. I tak liczba 2, iest prawie równá ułomkóm: $\frac{9}{4}$. $\frac{49}{25}$. $\frac{100}{49}$. $\frac{280}{144}$. i t.d. Liczba 3, iest prawie równá ułomkóm: $\frac{49}{16}$. $\frac{361}{121}$. i t.d. Znáyduiémy zaś té ułómki, dwoiąc, troiąc i t.d. kwadraty liczb naturalnych: 2, 3, 4, 5, i t.d. i uwáżaiąc, ieżeli między liczbami kwadratowémi nie będzie która tuż zbliżaiącá się do liczby podwoionéy, potroionéy, i t.d. którąśmy iuż znaleźli. Naprzykład: 2 razy 4, czyni 8, a blizko czyni kwadrat 9, więc 2, zupełnie rowná się $\frac{8}{4}$. a nie daleko iest od $\frac{9}{4}$. a zatém Piérwiásték z 2, będzie blizko $\frac{3}{2}$. Podobnie 2 razy 25, czyni 50, więc 2, rowná się $\frac{50}{25}$. a nie daleko iest od $\frac{49}{25}$; a zatém Piérwiástek z 2, będzie blizko: $\frac{7}{5}$. Możná potém poprawić, gdy zechcémy piérwsze te przybliżéniá, postępuiąc sobie tak, iak się wyżéy powiedziało.

Dosyć będzie tém czasém na téy początkowey wiadomości względem przybliżaniá Piérwiastków nie spółmiernych. Rzecz ta stała się materyą wielkiey wagi, gdy sławni Matematycy *Euler* i de la *Grange*,

głę-

głębiey ią brać poczęli, i rozmaite, iey przystosowania czynić. (m)

137. Niech będzie ułomek $\frac{1}{3}$, z którego trzeba wyciągać Pierwiastek kwadratowy. Zamiast cobyśmy mieli osobno ten Pierwiastek wyciągać z 2, i z 3, i dzielić potém Pierwiastek Licznika przez pierwiastek mianownika, wygodniey będzie ułomek tén $\frac{2}{3}$, odmienić na inny, gdzieby mianownik, był zupełnym kwadratém. Ułomek tedy tak odmieniony będzie $\frac{6}{9}$. Wyciągniymy pierwiastek z licznika 6, a trzecia część tego Pierwiastku, będzie pierwiastkiém ułomka $\frac{2}{3}$. $\sqrt{6} = 2, 4494$; trzecia tego pierwiastku część iest prawie 0, 8165. Jakoż kwadrat z 0, 8165, będzie: 0, 66667225; i nie wiele różni się od $\frac{2}{3} =$ 0, 6666666. i t. d.

138. Możnaby też wyciągnąć pierwiastek z $\frac{2}{3}$, przez ułomki zwyczayne. Kwadrat naybliższy ułomka $\frac{2}{3}$, iest 1. który różni się od $\frac{2}{3}$ przez $\frac{1}{3}$. Dzielmy, przez kwadrat 1. podwoiony toiest przez 2, tę różni-

---

(m) Obacz między innémi Dziéło pod Tytułém: *Introductio ad analysim Infinitorum* przez Eulera; i przydatki, de la Grange do Algebry po Francuzku wydané.

różnicę $\frac{1}{3}$, i będzie $\frac{1}{6}$. a odiąwszy $\frac{1}{6}$, od 1. albo od $\frac{6}{6}$, zoſtanie $\frac{5}{6}$. kwadrat z $\frac{5}{6}$, iest $\frac{25}{36}$ który od $\frac{2}{3}$. różni się przez $\frac{1}{36}$. Tę różnicę $\frac{1}{36}$. podzieloną przez dwa razy $\frac{5}{6}$ czyli przez $\frac{5}{3}$. toiest $\frac{1}{60}$, odeymuię od $\frac{5}{6}$, zoſtanie $\frac{49}{60}$. J ten ułomek $\frac{49}{60}$, będzie pierwiaſtkiém bardzo blizkim z $\frac{2}{3}$, ponieważ kwadrat z $\frac{49}{60}$ ieſt. $\frac{2401}{3600}$, a ułomek: $\frac{2}{3}$ znaczy tyle co $\frac{2400}{3600}$, różnica więc będzie tylko w $\frac{1}{3600}$.

139. W ogólności mówiąc, aby Piérwiaſtek kwadratowy wyciągnąć z ułomka iakiégo; trzeba pierwey tak zrobić, aby mianownik iego był kwadratém, mnożąc, gdy inaczéy bydź nié może, licznika i mianownika przez mianownika, i wyciągać potem piérwiaſtek z licznika tak rozmnożonégo, a przez mianownika nie rozmnożonégo podzielić ten pierwiáſtek.

140 Może się iednak obeyśdź czasém bez mnożéniá tak licznika, iako i mianownika, przez tegoż samégo mianownika; gdy mianownik iuż ieſt kwadratém, albo gdy takim można go uczynić, mnożąc przez mnieyszą iaką od mianownika liczbę, tak licznika, iako i mianownika. Naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiaſtek z $\frac{3}{4}$; wyciągniémy go z 3. i podzielimy przez 2; chcąc mieć piérwiáſtek z $\frac{5}{12}$, rozmnożymy 5. i 12. przez 3. a maiąc ſtąd $\frac{15}{36}$,

$\frac{15}{36}$, wyciągniémy pierwiástek z 15, i podzielimy przez 6. pierwiástek z 15, będzie prawie 4, odtrąciwszy $\frac{1}{8}$, toiest będzie $3\frac{7}{8}$ więc pierwiástek z $\frac{5}{12}$ będzie $\frac{31}{48}$; kwadrat albowiém z $\frac{31}{48}$. iest $\frac{961}{2304}$ a $\frac{5}{12}$. tylé znaczy co $\frac{960}{2304}$: a zatém uchybienié iest tylko w $\frac{1}{2304}$:

ROZDZIÁŁ VI.

O dodáwaniu i odeymowaniu Kwadratów, i zamiénianiu ich na iakiékolwiek Figury prostokréślné.

141. *DEfin:* W tróykącie prostokatnym, bok przeciwny prostému katowi nazywać będziémy, Liniią *Przeciwprostokątną*, albo iednem słowém, Przeciwprostokątną (Hypothenusa.)

142. *Twierdz:* 1. Kwadrat zrobiony na przeciwprostokątnéy Tróykąta prostokątnego, równá się summie kwadratów z dwóch innych boków tegoz tróykąta.

Práwdę Twierdzéniá tego okázać naprzód potrzeba na Tróykącie Prostokątnym, równo ramiénnym, toiest maiącym dwa boki rowné dowodząc: że kwadrat zrobiony na Przekątnéy kwadratu dwa razy iest od tegoż kwadratu większy.

Niech

Niech będzie ABCD, kwadrat; któ- Táb.VIII. *Fig.* 2.
rego Przekątna AC. Przeciągniymy AB, do E, a CB, do F, tak, aby BE, i BF, równe były AB. Poprowadźmy Liniie: AF, CE, EF, Czworokąt ACEF, będzie kwadratém przekątney AC, i będzie dwa razy większy od kwadratu ABCD.

Jakoż cztéry Tróykąty: ABC, ABF, EBC, EBF, mogą przyſtać do siebie: bo maią wszyſtkie kąty przy B. proſté, i boki przy nich równé: a zatém liniie AC, CE, EF, AF, będą wszyſtkié równé. Każdy oprócz tego kąt w czworokącie ACEF, ieſt proſty bo złożony z dwoch kątów pół proſtych: iak naprzykład kąt ACE, złożony ieſt z kątów półproſtych BCA, BCE; więc Czworokąt ACEF ieſt proſtokątém maiącym boki wszyſtkié równé a przeto ieſt kwadratém. Tén kwadrat ACEF, składá się z cztérech Tróykątów, z których każdy przyſtać może do iednégo z dwóch Tróykatów kwadratu ABCD. Że tedy takich Tróykątów ieſt cztéry w kwadracie ACEF, iakich ieſt dwa w kwadracie ABCD, kwadrat więc Przykątnéy AC, ieſt dwa razy większy od kwadratu tego, którégo bokiém ieſt ta Przekątná.

143. *Wniosek:* Aby dodadź dwa kwadraty równé, trzeba zrobić Tróykąt proſtokątny równoramiénny, którégo boki przy kącie proſtym byłyby równé, bokowi iednégo z dwóch kwadratów,

tów, a Przeciwprostokątna tego Tróykąta, będzie bokiem kwadratu równego summie dwóch tamtych kwadratów.

Tab. VIII. Fig. 3.

Można ieszcze nim się do ogólnego dowodzenia przystąpi, przytoczyć niektóre przypadki szczególne, gdzie trzy boki Tróykąta prostokątnego będą w liczbach wyrażone. Obacz na Figurze 3. gdzie trzy boki Tróykąta prostokątnego, wyrażone przez liczby: 5, 4, 3. w częściach równych, naprzykład w calach, kwadraty tych liczb są, 25. 16, 9. calów kwadratowych; i pierwszy kwadrat równa się summie dwóch ostatnich.

INNE PRZYKŁADY.

Przeciwprostokątne		*Boki.*	
13,	- - -	12	- 5
17,	- - -	15	- 8
25,	- - -	24	- 7.

Dowodzenie ogólne, które teraz damy, można obiaśnic na kwadratach z karty grubey wyrzniętych.

Tab. VIII. Fig. 4.

Niech będą dwa iakiekolwiek kwadraty: ABCD, i AEFG znaydziemy kwadrat równy ich summie w ten sposób. Postawmy naprzod te kwadraty, ieden przy drugim tak, aby dwa ich boki AD, i AG, stykały się, i iednę linią czyniły DG, Bok

AG

AG mnieyszégo kwadratu, przenieśmy potém na bok AD. większego kwadratu od D do J. Poprowadźmy linie IF, IC. Tróykąty proſtokątné IGF, CID. maią boki przyległe kątowi proſtemu równé bokóm kwadratów obudwóch. Trzeba więc dowieśdź że kwadrat przeciw proſtokątnéy IF, albo IC, równy ieſt summie kwadratów z GI, GF, albo z DC, i DI. Wyrznąwszy kartę wzdłuż Linii IF, i IC, przyłóżmy, Tróykąta IDC, Bok DC, na iego równym boku BC, bok DI, przypadnie na BH, przedłużeniu boku AB, a to z téy przyczyny, że obadwa są kąty proſté D, i B; bok zatém trzeci IC, weźmie położénié HC: będzie więc Tróykąt CBH, równy Tróykątowi GDI. Podobnie i drugiégo Tróykąta IGF, bok IG, przyſtanie zupełnie do boku HE, sobié równégo, ponieważ IG, rowná się AD, AD, równá się AB: a AB. równá się HE: bok GF, przypadnie na równy sobie bok EF: a IF, weźmie położénié HF: będzie więc Tróykąt FEH, równy Tróykątowi FGI. Czworokąt, który się zrobi z cztérech przeciwproſtokątnych: CI, IF, FH. HC, będzie miał wszystkié kąty proſté, bo kąt na przykład IFH, równá się summie kątów IFE, i EFH, któré równie czynią kąt proſty, iak czyniły kąty IFE i IFG. Tén więc czworokąt ieſt razém i proſtokątém maiącym wszyſtkié boki równé, a zatém ieſt kwadratém: który to kwadrat rowná się summie dwóch kwadratów podanych, a

zro-

zrobiony ieſt na Przekątnéy Tróykąta proſtokątnégo, maiącego za boki przyległe kątowi proſtému té samé, któré były bokami tychże kwadratów.

Dowodzénié naſtępuiącé powinno tym iaśniéy bydź wyłożoné; im prościéy ieszcze od piérwszégo tę prawdę okazuie, i więcéy daie do czynięnia dowcipowi. Wiele także użytecznych wnioſków z niego wypływa.

Táb. IX. *Fig.* 1. Niech będzie Tróykąt ABC. proſtokątny przy C. Na trzech bokach iego: AB, AC, BC, wyſtáwmy trzy kwadraty: ABDE, ACFG, BCHI. Kwadrat ABDE, równy będzie summie dwóch innych: ACGF. i BCHI.

Z wiérzchołku kąta proſtégo spuśćmy na przeciwproſtokątną AB, proſtopadłą CL, i przeciągniymy ią aż do boku ED, do M.

Pokázać teráz trzeba, że kwadrat BCHI, równy ieſt proſtokątowi BDML, a kwadrat ACFG, Proſtokątowi AEML, a zatém obadwa razém kwadraty równé kwadratowi ABDE.

Pociągniymy liniią CD, Tróykąt BDC, będzie połową Równoległoboku proſtokątnégo BDML; bo obadwa maią spólną podſtawę BD, i na téyże saméy równo odległéy MC, są zakończoné. (94.)

Po-

Pociągniymy liniią AI, Tróykąt BIA, będzie połową kwadratu BCHI, dlá téy. że, co wyżéy, przyczyny: bo obadwa także maią podstawę spólną BI, i obadwa na iedney równoodległéy AH, są zakończoné.

Jeżeli tedy dowiedziémy, że Tróykąty: ABI, CBD, są równé; iuż tém samém Prostokat BDML: równy będzie kwadratowi BCHI; bo kiedy połowy dwóch rzeczy są równé; to i dwie té rzeczy będą równé.

Té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie: ponieważ bok AB, w iednym, równy iest bokowi BD, w drugim, bo obadwa té boki do iednégo kwadratu należą: bok BI, w iednym, równy także iest bokowi BC w drugim: kąty między témi bokami zawarté: ABI, CBD, składaią się obadwa z kąta prostégo i z kąta ABC; więc té dwa Tróykąty są równé w powiérzchniach; a zatém i kwadrat BCHI, równy będzie Prostokątowi BDML. Tymże samym sposobém dowodzi się, że kwadrat ACFG, równy iest Prostokątowi AEML, toiest, pociągnąwszy liniie CE, BG, Tróykąty BAG, EAC, mogą przystać do siebie, a zatém będą równé: kwadrat więc ACFG, że iest dwa razy większy od Tróykąta BAG, będzie równy Prostokątowi AEML,

dwa razy także większému od Tróyką-ta EAC. (n)

144. *Wniosek.* Gdy od wiérzchołka kąta prostego, w Tróykącie prostokątnym sprowadzoná będzie Prostopadłá na przeciw prostokątną; kwadrat z boku iednego tego Tróykąta równy będzie Prostokątowi zrobionemu z przeciwprostokątney, i z odcinka uczynionego przez Prostopadłą, a przyległego temuż Tróykąta bokowi, którego kwadrat bierze się. Tak naprzykład kwadrat boku AC, toiest ACFG, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątney AB, albo AE. i z odcinku AL, toiest, Prostokątowi AEML; iako się wyżey pokazało. Podobnie i kwadrat drugiégo boku BC, toiest BCHI, równy

---

(n) Sposób postępowaniá w tém dowodzéniu, może służyć za wzór do innych dowodzéń przydłuższych i z wielu złożonych. Podzieliliśmy go na części, z każdą osobnośmy się obeszli. W tych samych częściach były znowu uczynioné, nowé podziały, nie zawisłé iedné od drugich, i każdy podział w szczególności dowodzony. Liniie nie były razém prowadzoné ale wtedy dopiéro, gdy były potrzebné. Ta ostatnia uwaga powinná bydź miedzy innémi na pamięci w dowodzéniu Twierdzéń złożonych, gdzie gdyby wielé razém liniy prowadzić to się na Figurze, nie mógłaby trudność zadaloną to Uczniom, nie dosyć ieszcze w takowé działaniá wprawionym.

równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątney AB, albo BD, i z odcinka BL, toiest, Prostokątowi BDML.

145. *Zagádn:* 1. Maiac dané dwa kwadraty, zrobić kwadrat równy ich summie, albo ich różnicy.

1. Zróbmy kąt prosty, którégo ramionami byłyby boki dwóch kwadratów danych. Pociągnąwszy przeciwprostkątną, ta będzie bokiem kwadratu równego summie tamtych dwóch kwadratów.

2. Zróbmy kąt prosty, dáwszy mu za iedno ramię bok mnieyszégo kwadratu. Od końca tego ramienia, promiéniém równym bokowi większego kwadratu, nakréślmy łuk koła, którýby przecinál ramié drugié kąta prostego: to przecięcié naznaczy długość tego drugiego ramiéniá, z którégo wyprowadziwszy kwadrat; ten bedzie równy różnicy dwóch kwadratów danych.

Gdyby kwadraty dané były równé; rozwiązanié byłoby ieszcze łatwieyszé.

Przystósowanié zagádniéniá, poprzedzaiącégo, do wynaleziéniá innych Kwadratów.

146. Jużeśmy pokázali, że kwadrat Przekątnéy iest dwá razy większy od

kwadratu, którégo iest ta Przekątná. Aby zrobić kwadrat równy summie trzech kwadratów równych, czyli aby potroić iaki kwadrat, znalazłszy naprzód kwadrat podwóyny, możnáby mu przydadź znowu kwadrat poiedynczy, ale téż można i ieszcze lepiéy tak sobie postąpić: Kwadrat potróyny iest różnicą kwadratu poczwornégo, od kwadratu poiedynczégo. Zróbmyż więc Tróykąt prostokątny, którégo bokiém iednym byłby bok kwadratu danégo, a Przeciwprostkątną dáymy mu dwa razy większą od tego boku; bok drugi, który przypadnie w tymżé Tróykącie będzie taki, iakiégo nám potrzeba, abyśmy mieli kwadrat potróyny.

147. *Uwága.* Tróykąt Prostokątny, którégo Przeciwprostkątná iest dwa razy tak wielká, iak iest wielkié ramię iedno kąta prostégo, tén mówię, Tróykąt dwa razy iest mniéyszy od Tróykąta równobocznego, ktorégo połową podstawy byłoby ramię iedno kąta prostégo, a drugié byłoby wysokością iego: a zatém, aby potroić iaki kwadrat, dosyć iest na podstawie dwa razy większéy od boku tego kwadratu zrobić Tróykąt Równoboczny, a wysokość tego Tróykąta okáże wielkość boku, na którym wystawić mámy kwadrat potróyny.

148. Aby zrobić cztéry razy większy kwadrat-

kwadrat od tego, który ieſt dany; trzeba tylko kwadratu danégo bok podwoić.

149. Aby zrobić kwadrat pięć razy większy od podanégo; trzeba przy kącie proſtym poſtawić dwa ramiona: iedno równé bokowi kwadratú danégo, drúgié dwa razy tak wielkié, a przeciwproſtkątná będzie bokiém kwadratu pięć razy większégo.

150. Aby zrobić kwadrat sześć razy większy od podanégo; trzeba albo dodadź do siebie kwadrat poczworny i podwóyny: albo téż kwadrat podwóyny potroić poprowadziwszy w danym kwadracie Przekątną, i tę podwoioną, wziąwszy za bok Tróykąta równobocznégo, którégo wysokość oznaczy bok kwadratu szesć razy większégo.

151. Aby zrobić kwadrat siédm razy większy od danégo: trzeba dodadź kwadrat poczwórny i potróyny, dáwszy kąt proſty między bokami tych dwóch kwadratów a na przeciwproſtkątney kwadrat poſtawiwszy; tén będzie siédm razy większy od danégo.

152. Aby zrobić kwadrat ośm rązy większy od podanégo; trzeba go albo podwoić, i podwoiony cztéry razy pomnożyć, dáwszy mu bok dwa razy większy od boku kwadratu podwoionégo; al-

albo też zrobić kwadrat równy Różnicy między kwadratém danym, i kwadratém dziewięć razy większym od niego; poſtawiwszy na tén koniec Tróykąt proſtokątny któremu za ramię iedno przy kącie proſtym dany bok kwadratu podanégo, a za przeciw proſtokątna, liniią trzy razy od tego boku większą. Ramię drugie, które przypadnie w tym Tróykącie, oznaczy bok kwadratu ośm razy większégo od danégo.

153. Aby zrobić kwadrat dziewięć razy większy od podanégo; trzeba mu dadź bok, trzy razy od podanégo większy.

154. Aby zrobić kwadrat dziesięć razy większy od podanégo; trzeba wziąść summę kwadratów, podanégo, i dziewięć razy większégo.

155. Aby zrobić kwadrat iedénaście razy większy od pódanégo; trzeba wziąść, summę kwadratów, dwa razy, i dziewięć razy tak wielkiégo, iak ieſt podany.

156. Aby zróbić kwadrat dwanáście razy większy od podanégo: trzeba podwoić bok kwadratu potróynégo, i na tym boku potróynym kwadrat poſtawić.

157. Aby zrobić kwadrat trzynáście razy

razy większy od podanego: trzeba wynaleźć summę kwadratu poczwornego, i dziewięć razy większego, niż ieſt kwadrat podany: albo też poſtawić Tróykąt proſtokątny i dadź dwa ramiona: iedno trzy razy, a drugie dwa razy większe od boku kwadratu podanego; przeciwproſtkątna oznaczy bok kwadratu trzynaście razy większego i t. d.

158. Wniosek z zagádnieniá poprzedzaiącego, ze kwadrat ramieniá iednego przy kącie proſtym, równy ieſt Proſtokątowi i z odcinka iey przyległego temuż ramionowi, przez proſtopadła zrobionego, ten mówię wniosek daie sposób ogólnieyszy, a czasem i proſtszy rozwiązaniá zagadnień w przyſtósowaniu położonych.

Jakoż ieżeli przeciw proſtkątná ieſt dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielká, iak odcinek przyległy iednemu boká, iak odcinek przyległy iednemu bokowi: proſtokąt z tey przeciw proſtkątney i z tego odcinka, będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielki, iak kwadrat tego samego odcinka: a zatém i kwadrat boku przyległego temu odcinkowi będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy, tak wielki, iak kwadrat tego odcinka: co iasno bydź powinno, maiąc w pamięci to, co się powiedziało w Arytmetyce na karcie 88, i naſtępuiących o mierzéniu Proſtokątów; a co tu nie zawadzi powtórzyć. 159.

159. *Podanié przybrané* (Lemma). (o) Gdy od punktu którégokolwiek na okręgu koła, poprowadzoné będą dwie liniie do dwóch końców średnicy; kąt przy tym punkcie zrobiony, i zawarty między dwiéma témi liniiami będzie prosty.

Táb. IX. *Fig.* 2. Niech będzie AKB, półkole, którégo AB, ieſt średniá. Weźmy iakikolwiek punkt, na przykłád K, na okręgu tego półkoła, i poprowádźmy od tego punktu liniie AK, BK, do końców średnicy. Kąt zrobiony przez té dwie liniie ieſt proſty.

Przygotowanié. Pociągniymy promién CK.

Dowodz. Tróykąt AKC. ieſt równoramiénny, bo AC; równá się CK; więc i kąty A, i CKA, na przeciw tym bokóm ſtoiącé będą równé; tož mówić, i o Tróykącie CKB; a zatém w Tróykącie AKB, kąt przy K, będzie równy summie kątów A i B; a ponieważ razém z témi dwoma kątami, czyni dwa kąty proſté; więc sám przez się będzie czynił kąt ieden proſty.

160.

(o) Lemma nazywámy podániém przybraném; że nie należy właściwie do téy rzeczy, o któréy mowa, i że się przybiérá czasém z jnnéy części Matematyki dlá przysposobiéniá nas do łatwieyszégo zrozumiéniá tego, co następuie.

160. *Zagádn:* 2. Znaléźć kwadrat, któryby kilka cáłe razy, lub więcéy zamykáł w sobie kwadrat dany.

Niech AC, zamyká tylé razy w sobie AB, ilé razy kwadrat, którégo szukámy, má w sobie zámykać tén który ieſt dany. Na AC, iako na śrzednicy nakréślmy półkole. Od punktu B. wýprowádźmy proſtopadłą BD, przecinaiącą półkole w Punkcie K. Liniia AK, będzie służyła za bok kwadratowi żądanému. Táb. IX. *Fig.* 3.

161. *Uwága.* Trzeba tu pokáżać widocznie Uczniom pożyteczność większą i ogólnieyszą Geometryi, niżeli Arytmetyki ponieważ w Arytmetyce nié możná zupełnie wyciągnąć Piérwiáſtku kwadratowégo z liczb całych które są podwóyné, potróyné, poszoſtné i t. d. innych liczb kwadratowych. J tak nié możná, nawet w ułomkach, znaléźć Piérwiáſtku kwadratowégo liczb 2, 3, 5, 6, i t. d; a w Geometryi, iako się pokázało, znáyduiémy i wyznáczámy boki kwadratów podwóynych, potróynych, poszóſtnych i t. d.

Możná więc powiedzieć, że niepodobność w wyznaczéniu piérwszych ilości, których kwadraty byłyby podwóyné, potróyné, i t. d. innych kwadratów, nie ieſt w sobie, ale pochodzi tylko od sposobu, którégo używámy.

162.

162. *Zagádn:* 3. Maiąc dany Proſtokąt, zamienić go na kwadrat iému rowny.

Rozwiąz: Na większy bok proſtokąta, przenieśmy długość boku iego mnieyszégo, tak, aby koniec ieden tego boku mnieyszégo schodził się z końcem iednym boku większégo. Na tymże boku większym, iako na śrzednicy nakréślmy półkole a do kóńca drugiégo boku mnieyszégo nie schodzącégo się z końcem drugim boku większégo wyprowádźmy Proſtopadłą, i od punktu przecięciá teyże Proſtopadłey z połkolém, poprowádźmy liniią do tego końca śrzednicy, ktory schodzi się z bokiém mnieyszym Proſtokąta. Ta oſtatnia liniia będzie bokiem kwadratu równégo Proſtokątowi.

164. *Wniosek.* Widzieliśmy w Rozdziále V. iako Figurę każdą prostokréślną możná zamienić na Prostokąt. Teráz się pokázało, iak możná Prostokąt każdy zamiénić na kwadrat: więc każda Figura Prostokréślná, może bydź i na kwadrat zamiéniona.

W Tróykącie maiącym kąt iedén roztwarty, kwadrat boku przeciwnégo tému kątowi, większy iest od summy kwadratów dwóch innych boków: mnieyszy zaś byłby kwadrat boku przeciwnégo kątowi ostrému od summy kwadratów dwóch innych boków w iednymże Tróykącie.

Dwa

Dwa następuiące Twierdzénia, pokáżą różnicę w Troykącie między kwadratém boku ták przeciwnégo kątowi roztwartému, iako i przeciwnégo kątowi ostrému, i kwadratowi dwóch innych boków.

165. *Twierdz:* 2. W Tróykącie maiącym kąt roztwarty, spuściwszy prostopadłą od iednégo końca boku przeciwnégo kątowi roztwartému, na inny bok którykolwiek; kwadrat tamtégo boku, będzie równy summie kwadratów dwóch innych boków, i dwa razy wziętému Prostokątowi z boku, na który prostopadła spuszczona, rozmnożonégo przez odległość od teyże Prostopadłéy, wierzchołka kąta roztwartego.

Niech będzie Tróykąt: ABC, który má kąt roztwarty przy C, od końca A, boku AB, przeciwnégo tému kątowi: spuśćmy na BC, prostopadłą AD. Kwadrat z AB, równy będzie summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokątowi z BC, przez CD. Táb. IX, *Fig.* 4.

Przygotowanię. Na linii BD, zróbmy kwadrat BDEF, i na dwóch bokach iego weźmy FG, i FL, równé BC; poprowádźmy przez G, i L, linie GI, i LC.

Dowodz: Prostokąt FGKL, iest kwadratém z BC; Prostokąt CDIK, iest kwadra-

dratém z CD: a Prostokąty obadwa BCKG, i EIKL, są z BC, przez CD.

Kwadrat z AB, równá się summie kwadratów z AD, i z BD, toiest summie kwadratów z AD, z DC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokątowi z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i DC, równá iest kwadratowi z AC; więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokątowi z BC, przez CD.

166. *Przykład.* Niechby Tróykat ACD był połową, Tróykąta równobocznégo; toiest, niechby liniiá AC była połową linii CD. Prostokąt z BC, przez CD, dwa razy wzięty, byłby równy Prostokątowi BC, przez CA; a sam przez się byłby tylko iego połową. Ten przypádek szczególny možná wyrazić w słowach następuiących: *W Tróykącie, którégo kąt roztwarty równá się summie kąta prostégo i trzeciéy części iego; kwadrat boku przeciwnégo kątowi roztwartému, równy iest summie kwadratów innych dwóch boków, i Prostokątowi z tychże boków.*

167. *Twiérdz:* 3. W Tróykącie iakimkolwiek uwáżaiąc ieden kąt ostry, a od końca boku przeciwnégo tému kątowi spuściwszy prostopadłą na iedno ramié

iego

iego; kwadrat tego boku równać się będzie różnicy między summą kwadratów ramión obudwóch kąta tego ostrégo, i dwa razy wziętym Prostokątém z ramienià, na które prostopadłá iest spuszczonà, i z odległości wierzchółka kąta ostrégo od prostopadłéy.

Niech będzie Tróykąt ABC, w którym kąt C iest ostry. Od końca A, boku przeciwnego AB, spuśćmy Prostopadłą AD, na ramié BC, kąta ostrégo. Kwadrat z AB, równy będzie różnicy między summą kwadratów z AC, i z CB, i dwa razy wziętym Prostokątém, którégo bokami będą BC, i CD. Táb. IX. *Fig.* 5.

Przygotowanié. Zróbmy kwadrat z CB, BCEF. Naznáczmy liniie FG, FL, równé DB, i CI równą CD. Poprowádźmy iescze liniie: DL, IG. Przeciągniymy DL, i CE do M i N, tak, aby LM, EN równé były CD. Złączmy ich końce liniią MN. Prostokąt ELMN, równy będzie kwadratowi z CD.

Dowodz: Kwadrat z AB równy iest summie kwadratów z AD, i z BD. Kwadrat z BD, toiest FGKL, równy iest kwadratowi BCEF, z BC, mniéy summą dwóch prostokątów: BGIC, i EIKL: albo dodáwszy, i odiąwszy kwadrat ELMN, z CD; kwadrat z BD będzie równy summie kwadratów: BCEF, i ELMN, mniéy

sum-

summą Prostokątów BGIC, EIKL, i kwadratu ELMN, czyli mniey summa Prostokątów BGIC, i IKMN; które obadwa są Prostokątami z boków BC, i CD; a zatém kwadrat z AB, iest równy summie kwadratów z AD, z CD, i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątém z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i z CD, równá się kwadratowi z AC; więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC, i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątém z BC, przez CD.

168. *Przykład.* Niechby Tróykąt ACD, był połową Tróykąta równobocznégo, a zatém AC, dwa razy większá od CD; w takim razie kwadrat z AB, będzie równy summie kwadratów z AC, i z BC, mniey Prostokątém z tychże boków AC, i BC. Co tak można wyrazić: *W Tróykącie, którégo kąt iedén równá się kątowi prostému, mniéy trzecią iego częścią, kwadrat boku przeciwnégo tému kątowi równać się będzie różnicy między summą kwadratów z ramion tegoż kąta, i Prostokątém z tychże ramion.*

169. *Wnioski i Przystósowanid dwóch Twierdzéń ostatnich.*

1. Jeżeli w Tróykącie kwadrat iednégo boku równy iest summie kwadratów z ramion kąta przeciwnégo, albo większy

szy lub mnieyszy od téy summy; kąt też przeciwny będzie prosty, albo roztwarty, lub ostry.

2. W każdym Tróykącie, Prostokąt dwa razy wzięty, z boku któregokolwiek i z odległości wierzchołka kąta iednego przy tym boku, od prostopadley spuszczoney na tenże bok, z wierzchołka kąta iému przeciwnego, ten, mowię, dwa razy wzięty Prostokąt, równy iest różnicy między summą kwadratów z dwóch ramión, i kwadratém boku przeciwnégo tému kątowi, toiest, równy będzie summie tych dwóch kwadratów, mniéy kwadratem boku przeciwnégo, gdy kąt iest ostry; a gdy roztwarty, to tén Prostokąt dwa razy wzięty, równy będzie kwadratowi boku przeciwnego, mniéy summą kwadratów z ramión: a zatém ieżeli wiadome nám są w liczbach boki Tróykątu; doydziémy stąd w liczbach i prostokąta tego podwóynégo: doydziémy i odcinka (*Segmentum*) podstawy, zawartego między wierzchołkiem kąta, o którym iest rzecz, i prostopadłą. A że kwadrat wysokości Tróykąta, równá się rożnicy między kwadratém boku przyległégo odcinkowi, i kwadratém tegoż odcinka; więc doydziémy i wysokości Tróykąta, a zatém i powierzchni iego.

170. *Przykład.* 1. Niech będą trzy boki: BC, AB, AC, w liczbach oznaczone:

né: piérwszy 21, drugi 20, trzeci 13.

Kwadrat z AB, ieſt 400.

Summa Kwadratów z BC, i AC, ieſt summa z 441. i z 169. toieſt 610.

Ta summa ponieważ ieſt większá, niż kwadrat z AB, przeto kąt przy C. ieſt oſtry.

Różnica między tą summą i kwadratém z AB, ieſt: 210, która to różnica równá się podwóynému Proſtokątowi z BC, przez CD, czyli liczbie znaczącéy długość boku BC, rozmnożonéy przez liczbę oznaczaiącą długość odcinka CD, dwa razy wziętą. Tén Proſtokąt poiedynczy wyrazi się więc przez 105. A że BC oznaczoné ieſt przez 21, więc długość CD, będzie 5. Kwadrat z AD równá się różnicy między kwadratém z AC, i kwadratém z CD, toieſt, różnicy między 169. i 251. Ta różnica ieſt: 144, więc AD, będzie oznaczoné przez 12, Powierzchniá Tróykąta CAB, ieſt połową Proſtokątu z BC, przez AD, toieſt, 126.

171. *Przykład* 2. Niech będzie BC 11, AB 20, AC, 13. Kwadrat z AB, będzie 400.

Summa kwadratów z BC, i z AC, będzie summa z 121. i 169. toieſt: 290.

Ta

Ta summa ponieważ ieſt mnieyszá od kwadratu z AB; przeto kąt przy C, będzie roztwarty.

Różnica między tym kwadratém, i tą summą ieſt, 110: którá to różnica równá się podwóynému Proſtokątowi z BC, przez CD, a zatém Poiedynczy Proſtokąt będzie=55. A że BC, równá się 11; więc CD, będzie się równać: 5.

Kwadrat z AD, równá się różnicy między kwadratém z AC, i kwadratém z CD; toieſt różnicy między 169 i 25. Ta różnica ieſt: 144. więc AD będzie=12; a powierzchniá Tróykąta będzie 6. razy 11. toieſt 66. Trzeba na więcéy ieszcze przykładach wprawiać uczniów, dobieraiąc po większéy części liczb takich, aby Piérwiáſtki kwadratowé zupełnie w liczbach całkowitych wychodziły.

Przykłady:	*Boki*				*Podſtawa*
	51	i	25	-	52, albo 28
	52	i	29	-	69 albo 27
	17	i	39	-	44. albo 38
	68	i	87	-	95 albo 31.

172. *Przestroga 1.* Dlá większéy wygody używać na potém będziémy skróconych wyrażeń, których tu znaczénié wykładámy.

Znak tén: = wyrážać będzie równość między dwóma ilościami.

Znak: + gdzie iedna liniiá prosto drugą przeciná, wyrážać będzie dodanie iedney ilości do drugiey; i wymáwiá się tém słowém: *więcey* (plus) Naprzykład, 4.+5=9, wymáwiá się, cztery więcey piącią, równá się dziewięciom.

Znak: — wyrážać będzie odeymowanie iedney ilości od drugiey: i wymáwiá się tém słowém: *mniéy*, (minus). Naprzykład: 7—4=3: wymáwiá się, siédm mniéy cztéréma, równá się trzém.

Dlá oznáczéniá rozmnożéniá liczb, w Arytmetyce, albo Prostokąta z dwóch liniy w Geometryi, używać będziémy znaku: × toiest krzyża ukośnego. Naprzykład 4×3. znaczy cztéry przez trzy rozmnożone, AB×CD, znaczy Prostokąt z linii AB i CD: albo Prostokąt z AB, przez CD. Dzielénié oznácza się tym znakiém, toiest, dwiéma kropkami, iedną pod drugą, które kładą się po ilości podzielnéy, a przèd ilością dzielącą. Naprzykład 6: 2, znaczy 6, przez 2. podzielone. Można także dzielénié i sposobém ułomków wyrážać, kładąc za licznika ilość podzielną, a za mianownika, ilość dzielącą kwadrat iakiéy ilości, naprzykład linii AB, iednym z tych dwóch sposobém zwykł się wyrážać AB^2, albo AB^q, częściey iednak pierwszym.

I tak pierwsze Twierdzenie można było w ten sposób wyrazić: Táb. IX. Fig. 1.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Szóste $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD$ Fig. 4.

Siódme $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CD$ Fig. 5.

Wszystkie trzy tych Twierdzeń przypadki, takby razem mogły bydź wyrażone: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \pm 2BC \times CD$. W tym razie, gdzie kąt iest prosty, liniiá CD, a zatem i prostokąt $BC \times CD$. niknie.

173. *Przestroga 2.* Trzeba ostrzedz Uczniów, aby używaiąc tych skróconych wyrazów, mieli zawsze przed oczyma Figury stósuiące się do tychże wyrazów, i dobrze ie rozważali. Należy także ustnie pierwey wyrazić każde Twierdzenie lub Zagádnienie, nim się przystąpi do pisania ich znakami wyráz skrácaiącemi. I owszem lepieyby było, aby póty tych znaków nie używać, póki zupełney wprawy nie nabiorą Uczniowie w wyłożeniu ustnem a iasnem Twierdzeń i Zagádnień im podanych.

ROZDZIÁŁ VII.

O Liniiach stycznych z kołém; o kątach przy okręgu koła; i o kątach, których wierzchołki są między okręgiém, albo za okręgiém.

174. *DEfinicye.* Koła równé są té, których promienié są równé i takié koła przystać mogą do siebie.

Gdyby to podanié nie zdáwało się bydź tak oczywistém, aby go przypuścić można, za Definicyą; tedy możnaby dowieśdź ié tymże samym sposobém, którym wyłożyliśmy w Rozdziele I. tworzénié się koła; (8) pokazuiąc, iż dwie liniie równé, obrotém swoim około iednego i nie poruszonego końca, nie mogą zrobić, tylko równé dwa koła: albo téż uważaiąc té dwie liniie, iak gdyby iedna leżała na drugiéy, i iak gdyby obiedwie razém czyniły tén obrot; w takim razie, iakiékolwiek będzie położénié spólné tych dwóch liniy, ponieważ zawsze iedna do drugiéy przystaie, więc i té mieysca, któré przeyśdź maią w tymże samym czasie, i té, któré iuż przeszły w czasach równych, rachuiąc od początku ich obrotu, przystałyby do siebie: a zatém i

całé

całé té mieysca, czyli koła, któreby zrobiły, mogłyby téż do siebie przyſtać.

Końce tych dwóch liniy tak się obrácaiących, w czasach równych, zrobiłyby łuki równé, a zatém w kołach równych, kąty przy ich środkach równé, zamykaią swémi ramionami łuki równé.

Wzaiémnie, gdy w równych kołach, równe łuki weźmiémy, kąty w środkach tych kół, które między ramionami swémi zamykaią té łuki, będą równé.

Niech będą dwa łuki równé: BA, ba, w dwóch równych kołach. Kąty: ACB, acb, które wiérzchołki swoie maią w środkach tych kół, i które zamykaią swémi ramionami te łuki, są téż równé. Bo gdyby kąty ACB, acb, nie były równé, kąt naprzykład ACB, gdyby był mnieyszy od kąta acb; to kąt inny, naprzykład DCB, byłby równy kątowi acb: a zatém i łuki DB ab, byłyby równé; ale, że wzięliśmy za równé łuki AB i ab; więc łuki także AB i DB, byłyby równe, co ieſt nie podobná, chyba żeby liniie CD, i CA iednę tylko liniią czyniły, zupełnie do siebie przyſtaiąc. Táb. X. *Fig.* 1.

Część koła zawartą między dwóma promieniami i łukiem, zwać będziemy wycińkiém koła, (*Sectór Circuli.*)

Z tego;

Z tego co się wyżéy powiedziało, wnieść można, że w równych kołach i wycinki te przyftać mogą do siebie, których kąty albo łuki są równé; a wzaiémnie, że kąty i łuki są równé w tych wycinkach, które przyftać do siebie mogą.

W kołach równych, łuki równé maią téż i ciénciwy równé. Jakoż w takich dwóch kołach tróykąty równoramienné, złożoné z ciénciwy i z dwóch promiéni, mogą przyftać do siebie, dla równości promiéni, i kątów w śrzodku, które na równych łukach wspiéraią się.

Wzaiémnie, ieżeli w kołach równych ciénciwy są równé; łuki téż równé będą: bo Tróykąty złożoné z tych ciénciw, i z promiéni równych, maiąc trzy boki równé, mogą przyftać do siebie, i kąty w śrzodku, zrobioné przez dwa promiénie będą równé, a zatém i łuki im przeciwné, równé będą.

Przez *odcinek koła* (segmentum Circuli) rozumieć będziémy mieysce zawarté między łukiém i ciénciwą.

Gdy ciénciwa nie ieft razém śrzednicą, dzieli koło na dwa odcinki: iedén większy, a drugi mnieyszy od półkoła. Takié dwa odcinki nazywaią się odcinkami *na przemián* (Alterna.)

W dwóch

W dwóch równych kołach, ieżeli dwa odcinki maią równé łuki, przyſtać do siebie mogą. Jakoż té odcinki są różnicami dwóch wycinków maiących równé łuki, od dwóch Tróykątów, które za podstawy maią ciénciwy tychże łuków równych.

A że té wycinki mogą przyſtać do siebie, bo maią łuki równé; Tróykąty mogą też do siebie przyſtać, bo maią wszyſtkie trzy boki rowne.

Więc i dwa odcinki, przyſtać mogą do siebie będąc różnicą dwóch Tróykątów równych, od dwóch wycinków równych.

Wszyſtko to, co się teráz powiedziało, trzeba przyſtósować do łuków, ciénciw, wycinków, odcinków iednégo koła.

Té podániá powinnyby się wydáwać oczywiſtémi, i nie potrzebować wcale żádnego dowodzénia, i z téy przyczyny są bardzo zdatné, aby się na nich wprawiali Uczniowie w tłumaczénié się iak náydokładnieyszé z tych nawet wyobrażéń, któré im iuż wyſtawuią rzecz iaką dosyć iaśnie; i aby tym sposobém wyobrażéniá w sobie proſte, prościeyszemi ieszcze czynić uczyli się.

175. *Twiérdz:* 1. Prostopadłá ciągnioná od śrzodka ciénciwy, przechodzi przez śrzodek koła.

2. Liniiá prostá prowadzoná od śrzodka koła do srzodka ciénciwy, iest do niéy prostopadłą.

3. Prostopadłá od śrzodka koła spuszczoná na ciénciwę, przypadá na iey śrzodek.

Tab. X. *Fig.* 2. Niech będzie AB, ciénciwa w kole, którégo śrzodek C, a promiéń CA.

1. Prostopadłá od śrzodka D, ciénciwy wystawioná, przechodzi przez śrzodek koła.

Dowodz: W téy prostopadłéy wszystkié punkta iednakowo są odległé od dwóch końców ciénciwy: a że i śrzodek koła iednakowo iest odległy od dwóch końców téyże ciénciwy: więc będzie też znaydował się na téy prostopadłéy.

2. Liniiá CD, od śrzodka koła poprowadzoná do srzodka ciénciwy, iest do niéy prostopadłą.

Dowodz: Tróykąty: DCA, DCB, mają wszystkié boki równé; więc mogą przystać do siebie, a w szczególności kąty przy D, są równé, a będąc kątami przyległémi, obadwa prosté bydź muszą, a zatem liniiá CD, iest prostopadłá do AB. 3.

3. Prostopadłá CD, spuszczoná od śrzodka koła na ciénciwę AB, przypádá na iéy śrzodek.

Dowodz: W Tróykącie Równoramiénnym ACB, kąty A i B są równé; więc w Tróykątach prostokątnych: ACD, BCD, wszystkie kąty równe będą iedné względem drugich: a że i boki AC, CB, są równe; więc té dwa Tróykąty przystać do siebie mogą, a w szczególności liniie AD, i BD, są równé.

176. *Wniosek.* Koło nié może mieć więcéy, iak dwa punkta spólné z liniią prostą; bo gdyby mogło mieć więcéy takich spólnych punktów, naprzykład trzy; złączywszy iedną liniią punkt pierwszy z drugim, a drugą punkt drugi z trzecim, i od śrzodka koła poprowadziwszy do tych dwóch liniy dwie prostopadłé, té uczyniłyby Tróykąt maiący dwa kąty prosté, co iest nie podobna.

177. *Zagád:* 1. Maiąc dané trzy punkta, których położénié nie iest w linii prostey, nakreslić koło, któreby przez té trzy punkta przechodziło.

Rozwiąz: Ponieważ śrzodek koła powinien się znaydować na każdéy proſtopadłey poprowadzoney od srzodka linii łączącey dwa punkta, znáyduiącé się w ko-

w kole, ieżeli tedy piérwszy z punktów danych złączymy linią z drugim, a drugi z trzecim, i od śrzodka tych dwóch liniy poprowadziemy Prostopadłé; té przetną się w punkcie, który będzie śrzodkiém koła maiącego przechodzić przez trzy punkta dané.

178. *Przystósowanié.* Znaléźć śrzodek koła danégo.

Rozwią: Na okręgu koła, weźmy trzy iakiekolwiek Punkta, a przez poprzedzaiącé zagadnienié szukáymy śrzodka koła przez té trzy punkta przechodzącégo.

179. *Wniosek.* Ponieważ prostopadłé wystawioné na śrzodku dwóch liniy łączących punkt iedén dany z dwoma innémi, nié mogą się przecinać tylko w jednym punkcie; więc nié może bydź więcéy iak iedno koło przechodzącé przez té trzy punkta: albo ieżeli dwa koła przechodziłyby przez té trzy punkta, toby nie były tylko iednem w rzeczy saméy kołém: a zatém gdy dwa koła się przecinaią, nie więcéy mogą mieć iak dwa punkta spólné w przecięciach. Ta własność koła, że ié z trzech punktów danych wyznaczyć można, iako i ta druga, że wszystkié iego promienie są równe, różni koło od wszystkich krzywych liniy, podobnie iako liniiá prostá różni się przeto od krzywych liniy, że dosyć

ieſt

iest mieć dwa punkta dané, aby ią wyznaczyć.

180. *Twiérdz:* 2. Od końca promienia koła wyprowadziwszy Prostopadłą do tegoż promienia; wszystkié inné punkta téy prostopadłéy będą za kołém.

Dowodz: Odległością którégokolwiek z tych inszych punktów, od śrzodku koła, iest przeciwprostokątná Tróykąta, którégo bokiém iednym iest promień koła: a że przeciwprostokątná większá iest od iednégo z boków Tróykąta; więc i odległość od śrzodka koła, punktu którégokolwiek na prostopadłéy, oprocz tego, który iest końcém promienia, większá iest od tegoż promienia: a zatém każdy z tych punktów będzie za kołém.

181. *Defin:* Gdy prostá liniiá iedén tylko má punkt spólny z okręgiem koła; taká liniiá nazywá się styczną z kołém *(Tangens Circuli.)*

182. *Zagádn:* 2. Maiąc dany punkt na okręgu koła, poprowadzić przez niego styczną.

Rozwiąz: Punkt dany ze śrzodkiém koła złączmy promiéniém: i od tegoż punktu wyprowadźmy prostopadłą do promiénia: a ta sama będzie i styczną z kołem w punkcie danym. 183.

183. *Zagádn:* 3. Od punktu danégo za kołém, poprowadzić do tegoż koła, styczną.

Rozwiąz: Złączmy liniią, punkt dany ze śrzodkiém koła. Na téyże linii, iako na śrzednicy, nakréślmy półkole; punktém, gdzie okrąg półkoła przecinać będzie koło dané, będzie tym samym punkt tén, do którégo poprowadzoná liniiá od punktu danégo, będzie styczná z kołém (159.)

To zagádniénié dwoiako może bydź rozwiązané: gdyż półkole z iedney lub z drugiey strony śrzednicy nakreślić możná.

184. *Twiérdz:* 3. Od końca promiéniá poprowadziwszy styczną z kołém, ieżeli przez punkt, w którym się ta styczná koła dotyká, przeciągniémy inszą iaką liniią prostą, ta przecinać będzie okrąg koła.

Dowodz: Promiéń koła iest prostopadły do stycznéy w końcu tegoż promiéniá, a zatem pochyły będzie do każdéy inszéy linii, przez tén koniec promiéniá, toiest punkt koła przychodzącéy. Poprowadziwszy więc prostopadłą od śrzodka koła do téy linii, ta prostopadłá krótszá będzie od promieniá: bo promiéń będzie przeciwprostokątną tego Tróykąta, któ-

rego

rego ta prostopadła będzie tylko bokiem: a że koniec promienia iest na okręgu koła; więc koniec tey prostopadłey nie doydzie do okręgu koła. Już tedy ieden punkt tey linii będzie w kole, a drugi w samym okręgu koła, na końcu promienia: a zatem liniia ta, przechodząca przez koniec promienia, ponieważ drugi swóy punkt ma w kole, przecinać go musi.

185. *Twierdz.* 4. Jeżeli liniia prosta iest styczną z kołem, będzie:

1. Promień poprowadzony od punktu tego, gdzie się liniia styka z kołem będzie do tey styczney prostopadłym.

Jakoż, gdyby promień do punktu tego poprowadzony, nie był do styczney prostopadłym, tedy liniia insza prostopadła do tego promienia, i przechodząca przez iego koniec, byłaby styczną z kołem, a ta pierwsza zamiast stykania się z kołem, przecinałaby go: iako się w poprzedzaiącem twierdzeniu okazało.

2. Prostopadła do styczney, od punktu dotknięcia ciągniona, przechodzi przez środek koła.

Gdyby ta prostopadła nie przechodziła przez środek koła; tedyby iednak promień do tegoż punktu dotknięcia ciągnio-

gniony był prostopadłym do styczney, a zatém od iednégo punktu, toiest od punktu dotknięciá, możnáby dwie prostopadłé prowadzić, co iest niepodobna.

186. *Uwága.* Pokázaliśmy (59) własność kąta, którégo wiérzchołek iest na okręgu koła, a którego dwa ramiona wspiéraią się na końcach śrzednicy tegoż koła: to podane było tylko przypadkiém szczególnym podánia daleko ogólnieyszégo, w którém się dowodzi, że wszystkié té kąty są równé, któré wiérzchołek maią na okręgu koła, a ramionami wspieraią się na końcach równych łuków tegoż koła.

187. *Twiérdz: 5.* Kąt maiący swóy wiérzchołek na okręgu koła; a którégo ramiona są ciénciwami tegoż koła, iest połową innégo kąta, który má wiérzchołék w samym koła śrzodku, a ramionami swémi obeymuie ténże sám łuk, co i kąt piérwszy.

Táb. X. *Fig. 3.* Niech będą kąty ACB, ADB, z których piérwszy má wiérzchołek w śrzodku C koła, a drugi na okręgu tegoż koła w punkcie D: i niech obadwa té kąty obeymuią ramionami swemi ténże sám łuk AB. W takim razie kat ACB dwa razy iest większy od kąta ADB.

Przypádek 1. Gdy iedno ramié AD

kąta

kąta ADB, iest razém i śrzednicą koła.

Dowodz: Tróykąt BCD, iest równoramiénnym, więc kąty B i D będą równé, a summa ich, dwa razy większá od iednégo z nich: ale że kąt ACB, iako zewnętrzny, równá się téy summie kątow B i D: więc dwa razy iest większy od iednégo z nich, naprzykład od kąta D. Táb. X. *Fig.* 4. i 5.

Przypádki té, w których żádné ramié kąta ADB nie byłoby razém śrzednicą koła, można łatwo przywieśdź do przypádku piérwszégo, poprowadziwszy śrzednicę DE.

Przypádek 2. Gdy śrzodek C, ieſt między ramionami kąta ADB.

Dowód. Kąt ADB, ſkłádá się z dwóch katów: ADE, i BDE, a kąt ACB ſkłádá się także z dwòch kątów: ACE i BCE: a że podług dowiédzieniá w piérwszym przypádku każdy z tych dwóch oſtatnich kątów, ieſt dwa rázy większy od iednégo z piérwszych, którégo ramiona obeymuią ténże sám łuk; więc obadwa razém piérwszé kąty są też dwa razy większé od obudwóch razém kątów drugich: a zatém kąt ACB, dwa razy ieſt większy od kąta ADB. Táb. X. *Fig.* 4.

Przypádek 3. Gdy śrzodek C, nie ieſt między ramionami kąta ADB. Do-

Táb. X. Fig. 5. *Dowodz*: Kąt ECB, dwa razy ieſt większy od kąta EDB, (1. Przypádek), ténże kąt ECB, ſkłádá się z dwóch kątów: ECA, ACB, kąt także EDB, ſkłádá się z dwóch kątów: EDA, ADB; a że kąt ECA dwa razy ieſt większy od kąta EDA (1. Przyp:) więc i kąt ACB, większy dwa razy będzie od kąta ADB.

788. *Uwága*. Uczniowie poczynaiący, więcéy doznáwać zwykli trudności, w poięciu tego trzeciégo przypádku, niż drugiégo, w którym przez dodawanié to samo się dowodzi, co w trzecim przez odeymowanié. Możná im to w tén sposób obiaśnic, że dwie naprzykłád liczby 12. i 8. z których piérwszá dwa razy ieſt większá od 6, a drugá od 4. té, mówię, dwie piérwszé liczby, gdy dodané będą, summa ich 20, będzie téż większá dwa razy od summy dwóch drugich liczb 6, i 4. toieſt od 10. A przeciwnie gdy naprzykłád 12, i 8. piérwszé większé ieſt dwa razy od 6. a drugie od 4, różnica między 12, i 8, toieſt 4, dwa razy téż większá będzie od różnicy między 6, i 4. toieſt od 2.

Gdyby tego była potrzeba, możnáby na liniiach to samo okázać.

Táb. X. Fig. 6. Niech będzie Liniiá AB, większá dwa razy od CD, i AE większá także dwa razy od CF. Od punktu E, naznaczywszy

wszy na linii AB, Liniie EG, EH, równé liniióm FC, FD; Liniie: AG, i BH, będą tak iedna, iako i drugá oznáczać różnicę Linii AE, od CF, summa zaś tych dwóch liniy AG, i BH, oznaczy różnicę całéy linii AB, od całey linii CD.

189. *Wniosek.* Kąty przy okręgu koła, któré ramionami swémi iednakowé łuki obeymuią, są równé: albo, co na iedno wychodzi, kąty w tymże samym odcinku koła są równé. Że tak w saméy rzeczy ieſt, co do kątów przynáymniéy oſtrych, toieſt: których ramiona obeymuią łuk mnieyszy od pół okręgu, wynika to z Twiérdzénia poprzedzaiącego. Z naſtępuiącégo zaś wnieść będzie łatwo możná, że to samo ma mieysce i w kątach przy okręgu koła, których ramiona obeymuią okrąg większy od pól okręgu.

190. *Twiérdz. 6.* Summa kątów w odcinkach na przemián, (174.) równa się dwóm kątóm proſtym: albo co iedno znaczy ieżeli czworokąt ieſt kołém obwiedziony, summa kątów przeciwnych tego czworokąta, równá się dwóm kątóm proſtym.

Niech ciénciwa AB, dzieli koło na dwa odcinki: ADB, ACB, kąt ADB, w iednym odcinku, wráz z kątém ACB w drugim odcinku, wyrownywá dwóm kątóm proſtym; albo, summa kątów D, i C, czworoką- Tab. XI. *Fig. 2.*

K rcką-

rokąta kołém obwiedzionégo, równá się dwóm kątóm proftym.

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną DC.

Dowodz: Kąty ADC, ABC, obeymuią obadwa ramionami swemi łuk iedén AC, mnieyszy od pół okręgu; więc są równé. Dlá téyże przyczyny i kąty BDC, BAC, są równé. Summa tedy kątów ADC, BDC, toieft kąt ADB, równa się summie kątów: ABC, BAC: a zatém summa katów ADB, ACB, równa ieft summie trzech kątów Tróykąta ABC; a ponieważ ta oftatniá summa wyrównywá dwóm kątóm proftym; więc i tamta.

Powtórzénié. Jeżeli ciénciwa ieft razém i śrzednicą, dzieli koło na dwa półkoła, a w każdém tém półkole, kąty są profté.

Jeżeli ciénciwa nie ieft śrzednicą; dzieli koło na dwa odcinki, iedén większy a drugi mnieyszy od pół okręgu: kąt w większym odcinku wspiérá się na łuku mnieyszym od pół okręgu, i ieft oftry; iednakowey zawsze wielkości. Kąt zaś w mnieyszym odcinku wspiéra się na łuku większym od pół okręgu, i ieft roztwarty, dopełniaiący zawsze dwóch kątów proftych, z kątém oftrym w drugim odcinku.

191. *Twiérdz:* 7. Jeżeli od punktu w od-

w odcinku koła, lub za odcinkiém będącé-go, do końców podſtawy tego odcinka poprowadzimy dwie liniie; kąt miedzy témi dwiéma liniiami zawarty będzie w piérwszym razie większy, a w drugim mnieyszy od kąta w samym odcinku.

Niech będzie punkt D, w odcinku albo za odcinkiém CAB; prowádźny od punktu tego, do końców Podſtawy AB, tegóż odcinka Liniie DA, DB, kąt ADB, będzie większy w piérwszym razie, a mnieyszy w drugim, od kąta ACB. Tab. XI. *Fig.* 2.

Dowodz: W piérwszym razie, kąt ADB, ieſt zewnętrzny Troykąta DBC, więc ieſt większy od iednégo z wewnętrznych kątów tegoż Tróykąta, toieſt, od kąta ACB, w samym odcinku.

W drugim razie, kąt ACB, ieſt zewnętrzny Tróykąta CDB, a zatém większy od kąta D, albo co na iedno wychodzi, kąt D, ieſt mnieyszy od kąta C, w odcinku.

192. *Uwága* 1. W piérwszym razie, gdzie ramié BD przedłużone spotyká okrąg w punkcie E, kąt ADB, równá się summie kątów: BCD, CBD, a kat CBD obeymuie swémi ramionami łuk EC, który téż łuk zawarty ieſt między przedłużeniami ramión AD, BD, kąta ADB.

W drugim razie, gdzie ramié BD prze-

ciná okrąg w punkcie E: kąt ADB mnieyszy ieſt od kąta ACB, w odcinku, katém CBD; który to kat CBD obeymuie swémi ramionami łuk CE, a tén łuk CE, mnieyszy ieſt od łuku AB, obiętégo od tychże ramión AD, BD kąta ADB.

193. *Uwága* 2. Na okręgu koła znáyduią się te wszyſtkie punkta, od których poprowadziwszy dwie liniie do dwóch punktów danych, kąt między dwiéma témi liniiami zawarty, iednakowy zawsze będzie, toieſt, okrąg koła ieſt *mieyscém* (Locus) tych wszyſtkich punktów.

194. *Defin.* Kąt zawarty między ſtyczną z kołém i między ciénciwą przez punkt dotknięciá prowadzoną, nazywá się *kątém odcinka.*

195. *Twiérdz.* 8. *Kąt odcinka*, równá się kątowi *w odcinku na przemián.*

Táb. XI. *Fig.* 3. Niech będzie ABD kąt odcinka, między BD, ſtyczną z kołem, i BA, ciénciwą przechodzącą przez B, punkt dotknięciá. Tén kąt równy ieſt kątowi którémukolwiek w odcinku na przemián, naprzykłád kątowi BEA, którego iedno ramié BE ieſt śrzednicą do punktu dotknięciá B, poprowadzoną.

Dowod. Kat EBD, między śrzednicą EB, i ſtyczną BD, zawarty, ieſt proſty (185) toieſt summa kątów: ABE, i ABD, czyni kąt proſty. Kąt

Kąt A w półkole ieſt też proſty (159) więc summa kątów ABE, AEB. w tymże samym Tróykacie równá także będzie kątowi proſtému. A zatém kąt ABE tak z kątem AEB, iak i z kątém ABD, czyni kąt proſty. Muszą tedy równé bydź kąty AEB, i ABD, kiedy przydany każdy z osobna do kąta ABE, czyni równą summę.

196. *Zagádn:* 4. Na linii danéy zrobić odcinek koła, w którym odcinku zmieściłby się kąt dany.

Niech będzie liniiá AB, na którey zrobićby trzeba tén odcinek. Táb. XI. *Fig.* 3.

Rozwiązanié. Od punktu B. prowadzę liniią BD, czyniącą kąt dany z liniią daną BA. Od tegoż punktu B, wyprowádzám proſtopadłą do BD, a od punktu A, drugą proſtopadłą do AB. Punkt E, przecięciá tych dwoch proſtopadłych, wyznaczy mi wielkość śrzednicy BE, należącéy do tego koła, w którégo odcinku má się mieścić kąt dany.

Albo téż: Od śrzodka linii danéy AB, prowadzę Proſtopadłą która przetnie liniią BE, w punkcie maiącym ſłużyć za śrzodek koła, w którém będzie odcinek żądany.

Zamiáſt robiéniá kąta ABD, równégo danému, możnaby zrobić kąt ABE, do-

pel-

pełniący kąt dany do 90. stopniów, toiest, czyniący z nim razém kąt prosty.

197. *Zagadn:* 5. Maiąc dané koło, oddzielić od niego odcinek, w którymby się zmieścił kąt dany.

Rozwiąz: Od punktu którégokolwiek na okręgu koła danego, ciągnę styczną, a przez punkt dotknięciá prowadzę cięciwę czyniącą kąt dany z styczną. Ta cięciwa oddzieli w kole odcinek żądany.

198. *Zagadn:* 6. W koło dané wpisać (*inscribere*) Tróykąt, któryby miał kąty wszystkié równe kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz: 1. Pociągnąwszy styczną przez którykolwiek punkt okręgu koła, przez tenże punkt prowadzę dwie cięciwy po prawéy i po lewéy ręce, czyniącé dwa kąty równé katóm Tróykąta danégo. Liniiá trzeciá łączącá końce tych dwóch cięnciw, będzie trzecim bokiém Tróykąta, którégo kąty wszystkié równé będą kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz: 2. Tróykąt dany opisuię (*circumscribo*) kołém, i do trzech wierzchołków kątów, prowadzę od śrzodka trzy promiénie Od tegoż samégo śrzodka, kréślę koło, promiéniém koła danégo. Punkta, w których okrąg tego drugiego koła, przecinać będzie promiénie trzy

pier-

pierwszégo, będą wierzchołkami kątów Tróykąta, którégo szukám.

199. *Zagádn:* 7. Maiąc dany Tróykąt, wpisać weń koło, to ieft nakréślic takié koło, któreby się dotykało trzech boków tego Tróykąta.

Rozwiąz: Śrzodek tego koła, ponieważ iednakowo má bydź odległy, od wszystkich trzech boków Tróykąta danégo, musi się gdzieś znáydować na linii dzielącéy kąt którykolwiek Tróykąta na dwie równé częśći: gdyż téy linii odległość punktów wszędzie będzie równá od dwóch boków Tróykąta iéy przyległych: podzieliwszy na dwie równé częśći, i drugi kąt Tróykąta, drugą liniią; tam gdzie ta drugá liniiá przetnie pierwszą, będzie śrzodek koła, którégo szukamy: bo tén punkt przecięciá będzie iednakowo odległy od wszyftkich trzech boków Tróykąta danégo.

200. *Zagádn.* 8. Maiąc dané koło, opisać na nim *(circumscribere)* Tróykąt, któryby miáł kąty wszystkié równé kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz. 1. W Tróykąt dany wpisuię koło; i do Punktów trzech dotknięciá, prowadzę trzy promiénie. Od tegoż samégo śrzodka kréślę drugié koło, promiéniém koła danégo. Punkta, w których

okrąg

okręg tego drugiégo koła przecinać będzie promiénie trzy piérwszego; albo ich przedłużenia oznaczą trzy punkta dotknięciá trzech boków Tróykąta, którégo szukám.

Rozwiąz: 2. W czworokącie, który się zrobi z dwóch promiéni koła danégo, i ze dwóch ſtycznych z kołem w końcach tychże promiéni, kąty dwa między témi promiéniami i stycznémi będą prosté, a zatém kąt iedén między dwiema stycznémi, i drugi kąt między dwóma promiéniami, będą razém wzięté, rowné dwóm kątóm prostym. (85) Stąd wypádá wykreślénié naſtępuiące.

Prowadzę promiéń iedén w kole daném: po obudwóch ſtronach tego promiéniá, prowadzę dwa insze czyniące z pierwszym dwa kąty, równé kotóm dwóm dopełniaiącym dwa którékolwiek kąty Tróykątá, do 180. ſtopniów, toiest, równé dwóm kątóm przyległym (14) do dwóch którychkolwiek kątow tegoż Troykąta. Przez końce tych trzech promiéni przeciągám trzy styczne, té zrobią Tróykąt żądany.



RO-

ROZDZIÁŁ VIII.

Wstęp do Proporcyi przez przykłady Geometryczne, z przystósowaniém w szczególności do Tróykątów podobnych, a w ogólności do inszych Figur prostokréślnych także podobnych.

DOtąd uważaliśmy tylko wielkość różnych Ilości i Figur, co do przystawania iednych do drugich, czyli do ich równości. Teráz też samé ilości porównywać z sobą będziemy w sposób ogólnieyszy.

201. *Uwági.* Widzieliśmy, że dwa równoległoboki, które miały iednakową podstawę i wysokość były równé. Weźmy teráz dwa równoległoboki z równą wysokością, ale z nie iednakową podstawą, i obáczmy co za różnica wypadnie między témi dwóma równoległobokami, z przyczyny nie równości ich Podstáw.

Jeżeli Podstawa iednégo z tych równoległoboków, dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy, większá będzie od podstawy drugiego; dá się podzielić tén pierwszy równoległobok, na dwa, trzy, cztéry, i t. d. równoległoboki równé między sobą, i z drugim równoległobokiém: ponieważ

wszy-

wszystkié iednakowé mieć będą wysokości, i podstawy; a zatém tén pierwszy równoległobok będzie dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy większy od drugiégo.

Gdyby podstawa piérwszégo równoległoboku nie zamykała w sobie kilka zupełnie razy podstawy drugiégo równoległoboku; naprzykład, gdyby ta piérwszá podstawa, miała w sobie 4, 5, 7, i t. d. takich części, iakich podstawa druga má 3; możnáby tę piérwszą podstawę podzielić na 4, 5, 7, i t. d. części równych między sobą, i równych także każdey z 3. części drugiéy podstawy; a zatém, iako liczby ukazuiacé wielkość podstawy piérwszégo równoległoboku względém podstawy drugiégo, są 4, 5, 7, i t. d. i 3; tak téż liczby ukázuiacé wielkość piérwszégo równoległoboku względém drugiégo, są 4, 5, 7, i t. d. i 3. Albo; iako podstawa piérwszégo równoległoboku, zamyká w sobie podstawę drugiégo tylé razy, ilé oznáczaią liczby ułomkowé $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d; tak téż piérwszy równoległobok zamyká w sobie drugi, tylé razy, ile oznáczaią té samé liczby ułomkowé $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, i t. d.

Podobnie gdy dwa Tróykąty maią równé wysokości, a nie równé podstawy, ieżeli podstawa piérwszégo Tróykąta zawierać w sobie będzie podstawę drugiégo, dwa, trzy, cztéry i t. d. razy; to téż powiérz-

wierzchnia tego pierwszego Tróykąta, będzie dwa, trzy, cztery i t. d. razy większa od powierzchni drugiego. Toż mówić, gdy podstawa iednego Tróykąta, zamiast zawierać w sobie kilka zupełnie razy podstawę drugiego, będzie się tylko składała z kilku takich części równych, z jakich się składa i podstawa Tróykąta drugiego. J tak ieżeli podstawy obudwóch Tróykątów zamykaią w sobie, iedna 4, a druga 5, takichże równych części; te też dwa Tróykąty zamykać będą ieden 4, a drugi 5, równych między soba Tróykątów maiących wysokość iednakową z wysokością niepodzielonych Tróykątów, a za podstawę, część iednę tylko podstawy tamtych Tróykątów. A zatem, iako podstawa pierwszego Tróykąta iest $\frac{4}{5}$ podstawy drugiego, tak też i powierzchnia pierwszego Tróykąta będzie $\frac{4}{5}$ powierzchni drugiego.

Dwa kąty maiące swoie wierzchołki weśrzodku tego samego koła, albo kół równych, i obeymuiące ramionami swemi łuki równe, są równe (174).

Jeżeli tedy z dwóch kątów we śrzodku kół równych, ieden wspiera się na łuku, dwa, trzy, cztery i t. d. większym, niżeli iest ten na którym wspiera się kąt drugi; można tamten kąt większy podzielić na dwa, trzy, cztery i t. d. kątów równych

sobie

sobie i kątówi drugiému. Tož samo mówić možná gdy dwa łuki nie zupełnie się zamykaią ieden w drugim. I tak ieżeli ieden z tych łuków może bydź podzielony na 4. równé części, a drugi na 3. takiéż części; dwa kąty, któré się wspiéraią na tych łukach, mogą się podzielić. ieden na 4, á drugi na 3. kąty równé między sobą.

Tož samo przyſtósowač móžná i wycinkóm w kołach równych, względém łuków, któré ramionami swémi też wycinki obeymuią.

W takich szczególnych razach, szukano, ilékroć dwie iakié ilości iednakowégo gatunku, naprzykład dwie liniie, dwa łuki, koła, zamykały się iedna w drugiéy, i znáydowano, že tylékroć i inszé dwie ilości iednakowégo także gatunku zamykały się iedna w drugiéy, naprzykład: dwa Równoległoboki, dwa Tróykąty, dwa wycinki i t. d.

202. *Definicye.* Gdy dwie iakié ilości do siebie przyrównywámy, abyśmy wiedzieli, ilé razy iedna zamyká w sobie druga; takié przyrównywanié nazwać možná stósunkiém Geometrycznym (*Ratio Geometrica*) albo bez przydatku ſtósunkiém tych dwóch ilości. Piérwszy wyráz ilości, która do drugiéy ſtósuiémy, zwać będziémy *Poprzednikiem* ſtósunku (*antecedens rationis:*) Drugi zaś wyráz ilości

téy

téy, do któréy przyrównywámy ilość piérwszą, nazwiémy *Następnikiém (consequens)* stósunku. To co z tego przyrównaniá wyniká, nazwać możná *Wykładnikiém* stósunku (*exponens rationis.*) Dwa stósunki nazywaią się równémi, gdy równémi są ich wykładniki.

203. *Uwága.* Z tych samych Definicyy widzimy, że wyrazy stósunku Geometrycznégo, nié mogą bydź tylko iednakowego gatunku, gdyż nié możná do siebie przyrównywać, tylko ilości iednakowégo gatunku: a ztąd dwa wyrazy stósunku tego, zawsze w liczbach mieć możemy, z których iedna tylé razy zamykać w sobie drugą będzie; ilé razy ilość przyrównywać się maiącá, zamyká w sobie drugą ilość tegoż gatunku, do któréy ią przyrównywámy. Przeto stósowanié takié uważać możná iak dzielénié liczebné biorąc za liczbę podzielną poprzednika stósunku, za liczbę dzielącą następnika stósunku, a za wieloráz wykładnika tegoż stósunku. Wykładnik tedy iedno będzie, co ułomek, którego Licznikiém Poprzednik, a mianownikiem następnik stósunku.

204. Gdy się cztéry ilości takié znáyduią, że stósunek dwóch piérwszych, równy iest stósunkowi dwóch drugich; takie cztery ilości czynią *Proporcyą Geometryczną*, albo bez przydatku, *Proporcyą*; i mó-

i mówimy, że tak się ma Poprzednik piérwszégo ſtósunku, do swégo naſtępnika, iak się ma Poprzednik drugiégo ſtósunku do swego także Naſtępnika. I tak, przypadki szczególné, któréśmy za przykład wyżéy przytoczyli, ſakby mogły bydź wyrażoné.

Jeżeli dwa Równoległoboki iednakową maią wysokość, powiérzchnia iednégo z nich, tak się będzie miała do powiérzchni drugiego; iak się ma podſtawa piérwszego, do podſtawy drugiégo. Jeżeli dwa Tróykąty iednakową maią wysokość, powierzchnia iednégo Tróykąta, tak się ma do powierzchni drugiego Tróykąta, iak się ma podſtawa piérwszégo do podſtawy drugiégo.

Jeżeli dwa kąty we śrzodku dwóch równych kół znáyduią się; iedén z tych kątów, tak się mieć będzie do kąta drugiego, iak się ma łuk obięty od ramión piérwszégo kąta, do łuku obiętégo od ramión drugiégo kąta.

Jeszcze i tak możnâby té samé podania wyrazić: Dwa równoległoboki iednakowéy wysokości tak się maią do siebie, iak ich podstawy.

Dwa Tróykąty iednakowéy wysokości, tak się maią do siebie, iak ich podstawy.

Dwa

Dwa kąty we śrzodku kół równych tak się maią do siebie, iak dwa łuki, na których się wspieraią. Toż mówić i o wycinkach kół równych.

Na koniec ieszcze krócéy zwykły się czasém wyrażać podobné podaniá, zamykaiąc całą proporcyą w dwóch tylko na oko wyrazach, i to ieszcze znaczących ilości odmiénnégo gatunku. *Wielé na tém zawisło, aby Uczniowie znali się dobrze na takowych wyrazach często używanych.*

Mówi się naprzykład, że powiérzchniá równoległoboku, którégo wysokość iest *iednostayná* (constans) proporcyonalną iest do swoiéy podstawy.

Tu się opuszczá wyráz drugiégo równoległoboku, który także wchodzi w porównanié, i iego podstawy; ale się wyrazów tych domyślać trzeba. Dlá tego się zaś opuszczaią, że tén drugi równoległobok równéy z piérwszym wysokości bydź mniemámy, i iednostaynéy, toiest nieodmiénnéy podstawy, a zatém i powiérzchni. Będzie tedy piérwszy równoległobok tym większy albo mnieyszy względém drugiego równoległoboku opuszczonégo; im podstawa piérwszégo większá lub mnieyszá iest od podstawy drugiégo. Tak, niech piérwszy równoległobok má wysokości 3. łokcie, ró-

wnie

wnie iak i drugi; ieżeli tén drugi równoległobok mieć będzie podstawę łokci 4, zawsze iednostayną i nie odmienną, a zatém i iednostayną powiérzchnią 12, łokci kwadratowych; piérwszy równoległobok tym większy lub mnieyszy będzie od drugiégo, toiest, tym większą lub mnieyszą mieć będzie powiérzchnią od drugiégo, im większą lub mnieyszą dámy mu podstawę od drugiégo. Dáwszy mu naprzykłád podstawy 8. łokci, będzie powiérzchniá iego 24. łokci kwadratowych, dwa razy większá od powierzchni drugiégo równoległoboku: dáwszy mu podstawy 2. łokci, będzie powiérzchniá iego 6. łokci kwadratowych, dwa razy mnieyszá od powiérzchni tegoż równoległoboku, i t. d. Gdy tedy tén piérwszy równoległobok, albo powiérzchniá iego, tylé się tylko powiększá lub pomnieyszá względém powiérzchni drugiego równoległoboku, ilé się powiększy lub pomnieyszy podstawá iego względém podstawy drugiéy iednostaynéy; dosyć iest więc powiedzieć w takim razie, że powiérzchniá tego równoległoboku, którégo wysokość iednostayná, proporcyonalną iest do swoiéy podstawy, toiest, gdy podstawa dwa razy naprzykład większá będzie, powiérzchniá téż większá będzie dwa razy: gdy tamta dwa razy mnieyszá, to i ta, i t. d.

205. Niech będą cztéry ilości oznaczo-

czoné przez ABCD, któré do siebie stósować można; zgodzono się; aby stósunek tén wyrazić kształtém nastepuiącym A:B=C:D: co się tak wymáwiá; A, tak się má do B, iak się má C, do D. Dwa punkta umieszczoné między dwóma wyrazami każdégo w szczególności stósunku znakiém są dzieléniá iednégo wyrazu przez drugi: dwie zaś linije w pośrzodku znaczą równości dwóch stósunków.

206. *Wnioski.* Z tych *zasád* (principium) któréśmy o proporcyach założyli, wynikaią następuiącé podaniá.

1. Jeżeli dwa stósunki są równé trzeciému; równé téż i sobie będą.

2. Jeżeli w dwóch Proporcyach trzy piérwszé wyrazy w iednéy, równé są trzém piérwszym wyrazóm w drugiéy; to i czwárté wyrázy równé téż będą.

3. Stósunek między dwiéma ilościami ténże sám iest, co i między témiż ilościami podwoionémi, potroionémi i t.d. Tak naprzykład 4. má się do 2, iak 8 do 4, albo iak 12 do 6. i t.d. Stąd wyniká, że można podzielić, albo rozmnożyć przez iednakową liczbę dwa piérwszé lub dwa ostatnié wyrazy Proporcyi, nie naruszaiąc przeto proporcyi między témiż cztéréma wyrazami.

4. Można także podwoić, potroić, i t. d. obadwa Poprzedniki, albo obadwa Następniki, a proporcya wszelako będzie zachowana. W pierwszym razie wykładnik stósunków, stanie się dwa, trzy, i t.d. razy większym, niż był z początku: w drugim zaś razie będzie tylko połową, trzecią częścią, i t.d. Wykładnika pierwszego.

5. W téyże saméy proporcyi, można odmienić mieysce obudwóm Poprzednikóm, to iest, położyć tam Poprzedniki, gdzie były Następniki, a Następniki tam, gdzie były Poprzedniki; równość iednak i po téy odmianie zachowana będzie między dwoma stósunkami téyże proporcyi. I tak naprzykład w téy Proporcyi: 4:2=12:6, można odmienić położenie Poprzedników: 4 i 12. i napisać: 2:4=6:12, wszelako iednak zachowa się Proporcya: bo iako w pierwszéy proporcyi wykładniki stósunkow obudwóch: 4: 2, i 12: 6, były równe, toiest tak, 4 przez 2, iak 12 przez 6, podzielone dawały na wykładnika, albo na wieloráz, 2; tak i w drugiéy proporcyi, wykładniki stósunków 2: 4 i 6: 12 są równe; toiest, tak 2, przez 4 iak i 6. przez 12 podzielone, daią na Wykładnika, albo na wieloráz iednakowy ułomek: $\frac{1}{2}$. Toż mówić i o podobnéy odmianie w jakiéykolwiek inszéy Proporcyi:

cyi:

cyi: co tak można ogólnie przez litery wyrazić:

Jeżeli A: B=C: D.
to też i B: A=D: C.

6. W proporcyi każdey można powiedzieć, że summa, albo różnica dwóch pierwszych wyrazów, tak się ma do iednego z tych dwóch wyrazów, iak się ma summa albo różnica dwóch drugich wyrazów, do iednego z tychże wyrazów. Naprzykład ieżeli $4:2=12:6$, to też będzie $6:2=18:6$, albo $6:4=18:12$, albo $2:4=6:12$.

Jakoż ieżeli każdą Poprzednika i Następnika summę lub różnicę stósuiemy do następnika iey własnego; Wykładnik każdego w szczególności stósowania powiększy się lub pomnieyszy iednością, a zatem równy będzie w obudwóch stósunkach i po takiey odmianie.

Jeżeli zaś każdą Poprzednika i Następnika summę lub różnicę stósuiemy do Poprzednika iey własnego, iedno czynimy, iak gdybyśmy pierwey poprzednika każdego za Następnika położyli, a potem dopiero, summę lub różnicę ich stósowali do następników, tak iak wyżey; a zatem tąż częścią pomnoży się lub zmnieyszy wykładnik pierwszego stosunku, iak i drugiego.

Wyrażénia literalné tegoż samégo.

Jeżeli A: B = C: D.

to téż A + B:B = C + D:D

A — B:B = C — D:D

A +: B:A = C + D:C

A — B:A = C — D:C.

Gdyby Następniki większé były od swoich Poprzedników, naprzykład B; od A, i D od C; tę proporcyą A:B=C: D możnáby w tę zamiénić B:A=D:C. a zatém.

B—A: A=D—C: C

B—A: B=D—C: D.

7. Gdy w Proporcyi, cztéry wyrazy iednégo są gatunku, toiest, gdy wszystkié znaczą n.p. liniie, lub powiérzchnie i t.d. można powiedzieć, że summa dwóch Poprzedników, tak się má do summy dwóch Następników; iak się má którykolwiek poprzednik do swégo następnika.

Jakoż, ieżeli iedén Poprzednik zamyká naprzykład dwa, trzy i t. d. razy swégo Następnika, i drugi téż Poprzednik, tylé razy następnika swégo zamykać w sobie będzie; a zatém i summa Poprzedników, tylé téż razy zamykać będzie summę następników. Przeto summa Poprzedników tak się mieć będzie do summy

my następników, iak każdy w szczególności Poprzednik do swégo Następnika. To, sámo rozumowanié przystósować można do różnicy dwóch Poprzedników i do różnicy, dwóch następników, i do więcéy iak dwóch równych stosunków.

Wszystkié té odmiany na wielu przykładach liczebnych obiaśnic należy.

207. *Uwága.* Dadzą poznać Nauczyciele Ucznióm swoim, że *Reguła trzech*, iest pewnym gatunkiém proporcyi, w któréy z trzech wyrazów znaiomych, szukámy czwártégo nieznaiomégo: co samo na przykładach iakich rachunkowych pokazać trzeba. Mnożénié nawet i dzielénié, do proporcyi przyrównać można: bo w mnożeniu liczby, mnożná i mnożącá, są śrzedniémi wyrazami proporcyi, iedność iest piérwszym wyrazém proporcyi, a liczba rozmnożoná iest ostatnim wyrazém. I tak naprzykład: $4\times3=12$. rozłożyć możná na proporcyą następuiącą $1:4=3:12$. W dzielénin zaś, liczba dzieląca i wieloráz są śrzedniémi wyrazami proporcyi; iedność iest wyrazém piérwszym: a liczba podzielná iest ostatnim wyrazém. I tak, naprzykład, $\frac{8}{4}=2$, albo $8:4=2$, rozłożyć możná na proporcyą następuiącą $1:4=2:8$. Więcéy ieszcze takowych przykładów podadź nie zawadzi.

208.

208. *Twierdzenie 1. fundamentalne.* Gdy w Troykącie iakimkolwiek bok ieden przedłużaiąc go powiększymy dwa, trzy, cztery pięć i t. d. razy, i przez końce takiego przedłużenia poprowadzimy równoległe od boku drugiego aż do boku trzeciego także przedłużonego; zrobią się tym sposobem Troykąty których i inne dwa boki większe też będą od boków pierwszego Troykąta, dwa, trzy: cztery, pięć i t. d. razy.

Táb. XI. *Fig. 4.* Niech na przykład będzie troykąt ABC, któregośmy bok AB, tak przedłużyli, aby liniia AD, dwa razy była większa od AB. Przez D. poprowadziwszy DH równoległa od BC; I liniia DH. dwa razy też większa będzie od linii BC, a liniia AH dwa razy większa od linii AC.

Wykreślenie. Przez punkt C. poprowadźmy CN równoległa od AB, któraby spótkała w punkcie N, liniią DH.

Dowodz: Czworokąt BDNC, iest równoległobokiem; więc boki w nim przeciwne są równe toiest, BC = DN, a BD = CN: a że BD = AB; więc i CN = AB. Kąty iednostronne A, i NCH są równe, iako też i kąty iednostronne ACB, AHD: a zatem Troykąty ACB, CHN dla równości kątów wszystkich i boków AB, CN równych, mogą przystać do siebie, i będzie AC = CH, a tem samem AH = 2 AC, to-

iest,

ieſt, liniiá AH dwa razy większá od AC. Jest też i BC = NH, a tém samem DH = 2 BC. toiest, liniiá DH dwa razy większá od BC. Weźmy znowu Liniią AE trzy razy większą od AB, i poprowádźmy EI równoległą od BC. Podobnie, iak wyżéy, dowiéśdź będzie możná, że też liniia EI trzy razy ieſt większá od BC, a AI trzy razy większá od AC: co się tatwo okáże pociągnąwszy liniią HO równoległą od A E: bo dlá równości kątów wszyſtkich, i boków AB, HO, Tróykąty ABC, HOI przystaną do siebie, a zatém AC = HI, i BC = OI. A że EO = DH, a DH = 2 BC = 2 OI, więc EO = 2 BC, a zatém EI = 3 BC. Tak też i AI = AH + HI = 2 AC + HI = 3 HI.

Tymże sposobém dowodzi się, że ieżeli linii AF, cztéry razy będzie większá od liniii AB; Liniiá też FL równoodległá od BC, cztéry razy od niéy większá będzie, i liniiá AL, cztéry także razy większá od AC, i t. d.

209. *Zagádn.* 1. Podzielić daną liniią na ilékolwiek części równych.

Niech naprzykład będzie liniiá daná AG, którą podzielić mamy na 5. części równych.

Rozwiązanié. Od końca iednégo, naprzykład A, linii danéy AG, prowadzę dru-

drugą liniią AM, iakieykolwiek długości, czyniącą z liniią daną, kąt iaki mi się podobá. Od A ku M, biorę tylé części równych na linii AM, na ilé ich má bydź podzieloná liniiá AG; tu naprzykład biorę 5. części równych. Punkt M. Linii AM, gdzie się ostatniá część podziáłu kończy, łączę liniią MG z punktém G, Linii daney AG. Przez inszé podziáłu punkta: L, I, H, C, prowadzę równoodległé od linii MG, do linii AG. Té równoodległé: LF, IE, HD, CB, wráz z liniią MG przecinać będą liniią daną AG w punktach podziáłu żądanégo.

Podobnym sposobém postąpić sobie trzeba, gdy na więcey lub mniey części podzielić przypadnie liniią daną.

Dlá większey łatwości, w prowadzéniu równoodległych, można użyć następuiącego sposobu, zwłászcza gdy na wielé równych części przypádá dzielić liniią daną.

Tab. XI. Fig. 5. Chcąc naprzykład podzielić liniią AB na 5. równych części, prowadzę od końca iey iednégo A liniią AC pod iakimkolwiek kątem, i od drugiego końca B, prowadzę liniią BD, od pierwszey równoodległą. Dzielę od punktu A liniią AC, na pięć iakichkolwiek równych części i na takież pięć równych części od punktu B, dzielę liniią BD. Punkta podziałów

równych

równych w obudwóch liniiach, łączę tylaż równoodległémi; té przetna liniią daną AB w punktach podziału żądanégo.

Dowodzénié tego nie różni się od poprzedzaiącégo, gdyż w równoległoboku ACBD, uważać możná iedén tylko Tróykąt, BAC, lub ABD; a zatém równość części, Linii AB, podobnie się, iak w piérwszym Twiérdzéniu dowiedzie. (p)

210. *Twiérdz:* 2. Dwa Tróykąty równokątné, maią proporcyonalné boki przeciwné kątóm równym.

Niech będą dwa Tróykąty AGM, i abc, w których kąty A i a, G i b, M i c są równé. Niech naprzykład bok AG, będzie pięć razy większy od boku ab; będzie też i bok AM, pięć razy większy od boku ac, i bok GM, pięć razy także większy od boku bc. Táb. XI. *Fig.* 4. *i* 6.

Jakoż odciąwszy Liniią AB, równą linii ab, i AC, równą ac, i pociągnąwszy liniią BC, Tróykąty ABC, abc, będą mogły przystać do siebie, a w szczególności kąty

B

(p) Rozwięzniąc tymże podobné Zagádniéniá, niecháy nie przestaią Uczniowie na Figurze podanéy, ale niech sami kréślą sobie podobną Figurę, i na niéy rozwięzuią Zagádniénié. Figura podaná niech im tylko służy do łatwieyszégo w czytaniu zrozumiéniá Propozycyi, którą gdy iuż dobrze zrozumicią; niecháy, zamknąwszy nawet Xiążkę, na Figurze osobnéy od niéh nakréślonéy pokażą Nauczycielóm, że to, co czytali, dokładnie zrozumieli, i umieią się dobrze wytłumaczyć.

B i b, C i c będą równé. A że też kąty G i b, M i c są równé; więc równé także są i kąty G i B, M i C; a zatém liniie BC, GM będą równoodległé. Przeto według pierwszégo Twierdzéniá, ieżeli AG iest pięć razy większa od AB, czyli od ab; będzie też i AM pięć razy większá od AC, czyli od ac, i GM pięć razy większa od BC czyli od bc. Toż samo mówićby się mogło, gdyby dwa boki Tróykątów, przeciwné równym kątóm nie pięć, ale mniey lub więcéy zupełnych razy w sobie się zamykały.

Gdyby zaś dwa boki w dwóch Tróykątach, przeciwné kątóm równym, nie zamykały się zupełnie ieden w drugim, ale ieden naprzykład z tych boków miał w sobie 7. takich równych części, iakich drugi má tylko 3; w takim razie insze też boki równym kątóm przeciwné, w tychże Tróykątach nie zamykałyby się zupełnie ieden w drugim, ale ieden składałby się z 7, takich części, z iakich 3. składá się drugi. Tak na *Figurze* 7, gdzie Tróykąty ABC, abc, są równokątné i bokóm AB, ab, taká długość daná, żeby bok AB, zamykał w sobie 7, części równych linii AD, a bok ab, takież miał 3. tylko części równé linii AD, albo ad; w tych Tróykątach poprowadziwszy liniie DE, de, równoodległé od BC, bc; boki AC i ac, mieć też będą pierwszy 7. drugi 3, części równé linii AE, albo ae, a boki BC i bc, zamykać

takze

takze będą piérwszy 7, a drugi 3, części równé linii DE, albo de. Toż mówić, gdyby boki dwóch Tróykątów, przeciwné kątóm równym, więcéy lub mniéy części równych w sobie zamykały.

211. *Przestroga.* W dwóch Tróykątach równokątnych, których boki porównywać z sobą mámy dobrze iest wiérzchołki kątów równych naznáczać podobnémi literami: naprzykład, gdy nad wiérzchółkiém kąta w jednym Tróykącie napiszémy literę A, napiszmy i nad wiérzchołkiém kąta równégo piérwszému w drugim Tróykącie literę a: gdy nad drugim kątém, w piérwszym Tróykącie będzie B, niech i nad drugim kątém równym tamtému w drugim Tróykącie będzie b, i t.d. Tym sposobém i boki przeciwné równym kątóm w obudwóch Tróykątach, będą podobnémi téż literami naznaczoné: a zatém, gdy w Proporcyi weźmiémy naprzykład boki AB, ab, za Poprzedniki stósunku, za Następniki wziąść będzie potrzeba boki AC, ac, albo BC, bc, i dlá tego wszystkié té proporcye będą dobré; AB: ab = AC: ac. AB: ab = BC: bc, albo AC: ac = AB: ab. BC: bc = AB: ab; albo, AC: ac = BC: bc, albo BC: bc = AC: ac.

212. *Twiérdz:* 3. Jeżeli we dwóch Tróykątach, kąty dwa którékolwiek są równé i boki dwa około każdégo z tych

kątów

kątów proporcyalné; takié Tróykąty będą równokątné.

Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, i w tych kąty A i a równé boki zaś AB, ab, i AC, ac, około tych kątów proporcyonalné, toiest, niech się má tak AB do ab, iak AC do ac, czyli AB : ab = AC: ac. W takim razie będą też równé kąty B, b, i kąty C, c, a zatém i stósunek boków BC, bc, będzie teñ sám, co i boków AB, ab, albo AC, ac.

Táb. XII. Fig. 1. *Wykréslénié*. Na boku AB, weźmy liniią AD, równą ab, i poprowádźmy DE równoodległą od BC, i spotykaiącą AC w Punkcie E.

Dowodz: Tróykąty ABC, ADE, są równokątné: więc (iako się w drugim Twiérdzeniu dowiodło) AB: AD. (albo ab) = AC: AE. A że AB: ab = AC: ac, więc AE = ac: a zatém Tróykąty ADE, abc mogą przystać do siebie: że zaś Tróykąty ABC, ADE, są równokątné; więc równokątné także będą i Tróykąty ABC, abc, a zatém, AB: ab = BC: bc.

213. *Twiérdz*: 4. Jeżeli w dwóch Tróykątach, trzy boki w jednym są proporcyonalné względem trzech boków w drugim, takie Tróykąty będą rownokątné.

Niech będą dwa Tróykąty, ABC, abc, i bo-

i boki w nich proporcyalné, tak, że AB: ab = AC: ac, i AB: ab = BC: bc, té dwa Tróykąty są równokątné.

Wykreślénié. Weźmy liniią AD równą linii ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz: Tróykąty ABC, ADE są równokątne, więc AB: AD (albo ab)=AC: AE.

A że téż iest AB: ab. =AC:ac
więc - - - AE = ac
Podobnie AB:AD (albo ab) =BC: DE
A że téż iest, AB: - - ab =BC: bc
Więc - - - DE = bc

A zatém dwa Tróykąty ADE, abc, wszystkié trzy boki maią sobie równé, i dlá tego mogą przystać do siebie, i są równokątné. A że téż są równokatné i Tróykąty ABC, ADE, więc równokątné także będą Tróykąty ABC, abc.

214. *Twiérdz:* 5. Niech będą dwa Tróykąty maiącé kąt iedén prosty, roztwarty, lub ostry równy w obudwóch Tróykątach, i niech stósunek ramión przy tych kątach będzie równy stósunkowi boków przeciwnych tymże katóm. Té dwa Tróykąty będą równokątné, byleby w trzecim przypádku, boki przeciwné

wné kątowi ostrému większé były w obudwóch Tróykątach, niżeli ramiona po iednéy lub po drugiéy stronie przyległé témuż kątowi: albo, chociaż té boki przeciwné mnieyszé będą od ramión, byleby inszy kąt w obudwóch Tróykątach był roztwarty, lub ostry, który iedno ramié, má spólné z kątém piérwszym, równym w obudwóch Tróykątach. Niechby naprzykład były dwa Tróykąty ABC, abc, w których kąty A i a, równé, i stósunek ramienia AC do ac, taki, iaki boku BC, do bc. Té dwa Tróykąty będą równokątné.

Tábl. XII. *Fig.* 2. 1. Gdy kąty A i a, obadwa są prosté.

Fig. 3. 2. Gdy kąty A i a, obadwa są roztwarté.

Fig. 4. 3. Gdy kąty A i a obadwa są ostré, ale boki BC, bc, większé od ramión AC ac.

Gdy kąty A i a, obadwa są ostré, ale boki BC, bc, mnieyszé od ramion AC, ac: i kąty B i b, obadwa ostré, *Fig.* 5. albo obadwa roztwarté *Fig.* 6.

Wykréślénié powszechné. Weźmy liniią AD, równą ac, i poprowádźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz: Tróykąty ACB, ADE są równokątné.

Więc

Więc . AC:AD (albo ac) =BC:DE
Ale téż iest AC: ac =BC: bc
więc DE= bc

A zatém dwá Tróykąty ADE, acb, mogą przystać do siebie, i są równokątné: a że téż i Tróykąty ACB, ADE są równokątné; więc równokątné także będą i Tróykąty ACB, acb. (q)

215. *Def.* Gdy w dwóch Figurach prostokréślnych rowné się kąty wszystkié znáyduią iedné względém drugich, i boki około tych kątów proporcyonalné; takié Figury nazywaią się *podobnémi* (Figurae similes.)

216. *Uwága.* Po przytoczonych dowodzéniach Twiérdzéń poprzedzaiących iaśnie się pokazuie, że równość kątów w dwóch Tróykątach, pociągá za sobą proporcyonalność ich boków, i wzaiémnie proporcyonalność boków w dwóch Tróykątach wywodzi równość kątów w tychże Tróykątach. W jnszych zaś Figurach prostokréślnych, które z więcéy niż

(q) Dlá skrócéniá, różné té przypádki w jednéro powszechném zamknęło się dowodzéniu; lepiéy iednak będzie każdégo z osobna przypádku osobno Uczniom dowodzić, aby wielu razém okoliczności wystawiéniém, báczność ich nie była roztargnioná.

niż trzech boków są złożoné, nié można z równości kątów we dwóch takich wielokątach, wnosić proporcyonalność ich boków, ani wzaiémnie z proporcyonalności boków, wnosić równość kątów. I tak kwadrat prostokątny, z kwadratém ukośnym, lubo maią boki proporcyonalné, nié maią iednak kątów równych. Dwa znôwu prostokąty, nie różnią się między sobą, co do kątów, a iednak boki ich mogą bydź nierówné i wcale nieproporcyonalné.

Trzeba iak náyiaśniéy i náydokładniéy wyłożyć Ucznióm té trzy rzeczy, toiest: *Przystawanié*, *Równość* i *Podobiéństwo* Figur.

Równość dwóch naprzykład Figur, ściągá się tylko do ich wielkości, nic zaś do ułożéniá boków, albo granic w których się zamykaią. I tak dwa Tróykąty, któré równé podstawy maią, i wysokości są sobie równé, lubo ich boki, nie iednakowo mogą bydź ułożoné, i większé iedné lub mnieyszé od drugich. Dlá tego téż możná znaléźć Tróykąt, lub kwadrat, równy Figurze prostokréślnéy danéy, iakáżkolwiek liczba iey boków będzie, i tychże boków ułożénié.

Podobiéństwo ściagá się tylko do saméy Figury czyli ułożéniá boków, nie zaś do wiel-

wielkości. Dwie Figury, naprzykład dwa Tróykąty mogą bydź do siebie podobné; lubo iedén będzie nader wielki, a drugi nader mały. Lecz aby Figury były podobné, trzeba 1*mo*. Aby miały iednakową liczbę boków. 2*do*. Aby kąty w iedney Figurze były równé kątóm w drugiéy. 3*tio*. Aby *boki odpowiadaiącé* (latera correspondentia) toiest, té, które zamykaią w sobie kąty równé, były proporcyalné. I tak dwa kwadraty zawsze są podobné iedén do drugiégo, chociażby naprzykład bok iednégo był na milę długi, a drugiégo tylko na łokieć, lub na cal.

Przystawanié zamyká w sobie razém równość i podobiéństwo. Dwie Figury aby przystać do siebie mogły; trzeba aby się w niczém nie różniły, tylko w tém, że na odmiennych mieyscach są nakreśloné. (r)

217. *Twiérdz.* 6. Jeżeli dwie iakiékolwiek Figury prostokréślné są podobné; i w każdéy Tab. XIII. *Fig.* 1.

M

(r) Przetrząsnąwszy Twiérdzéniá ściągaiacé się do równości, i do podobiéństwa Tróykątów; łatwo postrzeżémy, że dowodzéniá tam przytoczoné zupełnie się zasádzaią na tych, któréśmy dáwali mówiąc o przystáwaniu Tróykątów. Wielé na tém zawisło; aby często przypominać Ucznióm sposob postępowaniá, który prowadzi od wyobrażéń prościeyszych, do tych, które bardziéy są zawikłané.

w każdéy z nich przez wiérzchołki kątów równych, poprowadzimy do drugich kątów, tylé przekątnych, ile ich poprowadzić można; wszystkié té Tróykąty, na któré iednę Figurę podzielimy, będą podobné Tróykątóm w drugiéy Figurze.

Przykład: Niech beda dwa Pięciokąty ABCDE, abcde, podobné do siebie; od wiérzchołków A, i a, dwóch katów równych, poprowadziwszy przekatné, AC, AD, ac, ad; Tróykaty, ABC, ACD, ADE, będą podobné Tróykątóm, abc, acd, ade.

Dowodz: Ponieważ té Pięciokąty są do siebie podobné, kąty w nich B i b, będą równé, i boki około tych kątów proporcyonalné; dwa więc Tróykąty ABC, abc, są do siebie podobné, iako maiącé kąty B i b, równé, i boki, około nich proporcyonalné, a w szczególności kąt ACB, równy iest kątowi acb: a że też równé są dané kąty BCD, bcd; więc i kąty A CD, acd, równé będą. Boki także AC, ac, są między sobą iak boki AB, ab, albo BC, bc. Aże tak boki AB, ab, iak i boki, BC, bc, są w proporcyi z bokami DC, dc; więc i boki AC, ac, są proporcyonalné bokóm DC, dc; a zatém i Tróykąty ACD, acd, będą podobné, maiąc kąty C i c równé, i boki około nich AC, DC, ac, dc, proporcyonalné, a w szczególności kąty, ADC, adc, będą równé. A że znowu i kąty E, e, są równé; więc i Tróykąty ADE,

ADE, ade, będą względem siebie równokątne; a zatem podobne.

218. *Uwága* 1. Dlá dowiedzieniá, że Tróykąty ADE, ade, są podobne, nie trzeba było używać koniecznie proporcyonalności boków AE, ae, DE, de; można nawet było i nie pokazywać wyraźnie równości kątów E, e, z samego wykresleniá; ponieważ kątów EDA, eda, EAD, ead, mogła bydź rowność okázaná, z równości iuż dowiedzioney kątów ADC, adc, DAC, dac, CAB, cab, w jnnych Tróykątach: a tém samém równośc kątów E, e, wydałaby się, a zatém i podobieństwo Tróykątów ADE, ade, byłoby dowiedzioné.

219. *Uwága.* 2. Wielé na tém zawisło, áby to dadź postrzédz Ucznióm, że gdy we dwóch Figurach podobnych złączoné będą przekątnémi wiérzchołki dwóch kątów odpowiadaiących sobie; te przekątné mieć będą iednoſtayné stosunki, z bokami tych dwóch Figur; a za tém gdy w podobnych Figurach końce dwóch boków odpowiadaiących sobie złączymy przez przekątné; Tróykąty złożone z tych przekątnych i z dwóch boków należących do tych Figur, będą do siebie podobné.

220. *Zagádn:* 1. Maiąc dané trzy liniie proſté, na trzy piérwszé wyrazy proporcyi, znaléźć liniią czwártą proporcyonalną.

 Wy-

Wykréślénié. Zróbmy kąt iakikolwiek. Na dwa ramiona tego kąta, przenieśmy od wiérzchołka iego dwie dané liniie, maiącé służyć za dwa piérwszé wyrazy proporcyi. Końce tych dwóch liniy złączmy trzecią liniią. Przenieśmy ieszcze podobnym ſposobém i trzecią daną liniią na to ramié, na któré iuż iest przeniesioná piérwszá liniiá proporcyi. Od końca téy trzeciéy linii poprowadźmy aż do drugiégo ramiéniá liniią równoodległą od téy, która złączyła końce dwóch piérwszych liniy. Liniiá zawartá między wiérzchołkiém kąta i punktém, w którym oſtatniá równoodległá przeciná ramié drugié, będzie, czwartą liniią proporcyonalną, któréyśmy ſzukali. (s)

121. *Zagádn.* 2. Maiąc daną liniią prostą, tak ią przeciąć, aby dwa iéy odcinki tak się do ſiebie ſtóſowały, iak ſię ſtóſuią dwie inſzé dané liniie

Wykréślénié. Od końca iednégo linii danéy do przecięciá, poprowádźmy pod iakimkolwiek kątém liniią równą iednéy z tych dwóch, których dany iest ſtóſunek, a

(s) Co w Arytmetyce znaczy *Reguła trzech*, to znaczy w Geometryi Zagádniénié, aby trzy maiąc dané Liniie prosté, znaléźć czwártą proporcyonalną. Jest to w samév rzeczy Reguła trzech wykonaná na liniiach.

a od drugiego końca, w ſtronę przeciwna, poprowadźmy równoodległą od pierwſzéy, rowną drugiéy linii, którey także dany ieſt ſtóſunek.

Złączmy końce tych dwóch liniy w przeciwné ſtrony poprowadzonych, liniią trzecią, ta przetnie liniią daną w punkcie, któregośmy ſzukali.

Albo tak. Od końca linii danéy do przecięciá, poprowádźmy liniią, któráby z nią czyniła kąt iakikolwiek. Na tę drugą liniią, od wierzchołka kąta, przenieśmy iednę z tych liniy, których dany ieſt. ſtóſunek, i od końca znowu tey oſtatniéy linii pociągniymy drugą liniią, równą drugiéy, któréy także dany ieſt ſtóſunek: koniec téy złączmy z końcém linii danéy do przecięciá: a od tego punktu, gdzie ſię pierwſzá kończyła, a ta drugá zaczynała, poprowádźmy równoodległą, którá przetnie liniią daną do przecięciá w punkcie żądanym.

Tén oſtatni ſpoſób poſtępowaniá, może bydź przyſtóſowanym i w jnnych razach, gdzieby liniią daną na więcéy części przeciąć potrzeba, naprzykład na 3. 4. 5. i t.d. które takby się miały do ſiebie, iak ſię maią 3. 4. 5. i t. d. liniy danych. (t) 222.

(t) Takié zagádniénié iést têm samém w Geometryi, czem iest w Arytmetyce *Regulá spółki.*

222. *Zagádn.* 3. Przedłużyć liniią daną, tak, aby summa z téy linii i z jéy przedłużéniá tak się miała do saméego przedłużeniá, iak się maią do siebie dwie insźé liniie dané: czyli, znaleźć dwie liniie, których daná ieſt różnica i ſtóſunek.

Wykréślénié. Od obudwóch końców linii danéy, poprowádźmy w jednę ſtronę dwie liniie równoodległé, i równé dwóm liniióm, których dany ieſt ſtóſunek. Przez końce tych równoodległych, przeciągniymy liniią tak daleko, aż ſię ſpotka z przedłużéniém linii danéy. Punkt tén ſpotkaniá, wyznaczy długość przedłużéniá linii danéy; i odległość iego od dwóch końców]téyże linii, będzie wymiarém długości dwóch liniy, którycheśmy ſzukali.

223. *Zagádn:* 4. Maiac dany Tróykąt, i liniią oſobną, wyſtawić na téy linii Tróykąt podobny danému.

Sposób 1. Dwóm bokóm Tróykąta danégo, i trzeciéy linii danéy, ſzukám czwártéy proporcyonalnéy, i mieć będę dwa boki Tróykąta, któręgo ſzukám, w proporcyi z dwoma bokami Tróykąta danégo. Tymże ſpoſobém znaydę i trzeci bok Tróykąta, który má bydź podobny Tróykątowi danému.

Sposób 2. Od dwóch końców linii danéy

néy prowadzę po iednéy stronie dwie linie czyniącé z nią dwa kąty równé dwóm kątóm Tróykąta danégo; té dwie linie zeyściem się z sobą, zrobią z daną linią Tróykąt podobny danemu.

Sposób 3. Linią daną przenoszę na bok którykolwiek Tróykąta danégo, tak, aby koniec ieden téy linii był na wierzchołku kąta, a drugi tam, gdzie przypadnie, lub na samym boku Tróykąta, lub za nim, gdy linia dana dłuższa będzie od boku Tróykąta. Z końca tego drugiego, linii daney prowadzę równoodległą od boku Tróykąta przeciwnégo kątowi, od którego pierwszą linią ciągnąłém, i tak daleko ią prowadzę, aż się zniydzie z trzecim bokiém Tróykąta danégo, przedłużonym, gdy tego będzie potrzeba. Zrobi się tym sposobém Tróykąt podobny danemu, i maiący za podstawę linią równą danéy, który to Tróykąt przerysować potem mogę na saméy linii danéy. (u)

224. *Zagádn:* 5. Na danéy linii wykréślić iakąkolwiek Figurę prostokréślną podobną Figurze danéy.

Rozwiąz: Na danéy Figurze od końca boku którégokolwiek, prowadzę tyle

(u) Częsté tego zagádniéniá używanié, było pobudką do podaniá kilku sposobów, którémi bydź może rozwiązané.

lé przekątnych do innych kątów, ilé można, i dzielę tak Figurę daną na Tróykąty. Potém na linii danéy wykreślam po iednéy ſtronie ſpoſobem wyżey opiſanym, tylé Tróykątów podobnych, ilé ich ieſt w Figurze danéy. Wierzchołki tych Tróykątów, będą wierzchołkami kątów Figury, któréy ſzukałém.

225. *Uwága.* Między innémi ſpoſobami rozwiązaniá tego Zagadnieniá, ſpoſób podany zdaie ſię náylepſzym: a to dlá tego, że używaiąc go, uchybiéniá, które popełnić możná w położéniu linii, czyli boków Figury, nie zawisły iedné od drugich: i możná uchybić w położéniu iednéy linii, a nie uchybić tém ſamém, w położeniu drugiéy: na co oſobliwſzą baczność koniecznie mieć potrzeba.

226. *Podanié przybrané.* (Lemma). W Tróykącie proſtokątnym, gdy ſpuścimy prostopadłą, od wierzchołka kąta proſtego; ta proſtopadłá podzieli Tróykąt na dwa inſzé z piérwſzym rownokątné, a zatem i równokątné między ſobą.

Táb. XIII. *Fig.* 2. Niech będzie Tróykąt ABC proſtokątny w C, skąd ſpuſzczoná ieſt proſtopadłá CD, na przeciw proſtkątną AB; Tróykąty trzy: ABC, ACD, CBD są względém ſiebie równokątné.

Do-

Dowodz: Tróykąty ABC, ACD, maią kąt ſpólny A, i kąty ACB, ADC proſté, a zatém równé; trzeci przeto kąt w jednym, będzie téż równy trzeciému kątowi w drugim; Są więc obadwa té Tróykąty, równokątné. Podobnie i Tróykąty proſtokątne ABC, CBD, maią kąt spólny B, i ſą także równokątné.

W Tróykątach równokątnych ABC, ACD, mámy proporcyą: AB: AC=AC: AD. w Tróykątach: ABC, CBD będzie, AB: BC=BC:BD; a w Tróykątach ADC, CDB; AD: DC=DC: BD. w Tróykątach, ABC, ACD, iest téż i ta proporcyá: AB:BC=AC:CD.

To ieſt 1. W Tróykacie proſtokątnym, bok ieden ieſt śrzednim Geometrycznie proporcyonalnym, między przeciw proſtokątną i odcinkiém mu przyległym, który czyni proſtopadłá.

2. Wyſokość Tróykąta proſtokątnégo, iest śrzednią Geometrycznie proporcyonalną, między dwóma odcinkami przeciwproſtokątnéy.

3. Przeciwproſtokątná, dwą boki, i wysokość Tróykąta proſtokątnégo, ſą w proporcyi.

227. *Zagádn:* 6. Między dwiéma danémi liniiami, znaléźć śrzednią Geometryczną. *Spo-*

Sposób. 1. Złączywszy z sobą dwie dane linije, w jednę liniią prostą; na niey iako na śrzednicy nakreślmy półkole, i od punktu złączenia tych dwóch liniy, wynieśmy prostopadłą aż do okręgu półkoła. Ta prostopadła będzie śrzednią proporcyonalną, którey szukamy.

Sposób 2. Na większey z dwóch danych liniy, iako na śrzednicy nakreślmy półkole. Na tę samę śrzednicę, od końca iey iednego, przenieśmy drugą mnieyszą liniią daną, a od tego punktu, gdzie się na śrzednicy kończyć będzie, wynieśmy prostopadłą, aż do okręgu połkoła, i punkt zeyściá się z półkołem złączmy liniią z punktem tym śrzednicy, od którego przeniesiona była liniiá mnieyszá daná. Ta liniiá łącząca te dwa punkta, będzie śrzędnią proporcyonalną, którey szukámy.

ROZDZIÂŁ IX.

O stósunkach powierzchni Figur prostokreślnych w ogólności, a w szczególności o stósunkach Figur podobnych.

228. *Twierdz:* 1. Gdy cztery liniie są w proporcyi Geometryczney; prostokąt z dwóch skraynych, równy iest prostokątowi z dwóch śrzednich.

To

To Twiérdzénié trzeba naprzód obiaśnić na liczbach: ieżeli cztéry liczby są Geometrycznie proporcyonalné, dwie skrayné rozmnożoné iedna przez drugą, równé, będą dwóm śrzednim podobnie rozmnożonym. W każdéy albowiem proporcyi Geometrycznéy równość zachodzi między dwoma stósunkami Geometrycznémi, toiest: tylé razy piérwszy poprzednik zamykać w sobie powinién swégo następnika, ilé razy i drugi poprzednik zamyká także następnika swégo. I tak naprzykład w tey proporcyi $6:3=8:4$, iąk 6, zamyká w sobie 3, razy 2, tak i 8 zamyká 4, razy 2. Stąd wyniká, że rozmnożénié skraynych i śrzednich wyrazów proporcyi, możná oznaczyć, przez trzy iednakowé liczby, a tem samém okázac równość wyrazów rozmnożonych, tak skraynych iako i śrzednich. Naprzykład, ponieważ $21:3=28:4$, i równie 21. zamyká w sobie 3, iak i 28, zamyká 4, razy 7. a zatém tak $21=7$, razy 3, iak $28=7$, razy 4; więc 4 razy $21=4\times7\times3$; 3 razy $28=3\times7\times4$. A że $4\times7\times3=3\times7\times4$, więc i $4\times21=3\times28$.

Podobnie, ponieważ $16:12=20:15$ i tak 16 zamyká w sobie 12, iak 20. zamyká 15, razy $1\frac{1}{3}$ albo $\frac{4}{3}$; a przeto tak $16=\frac{4}{3}\times12$, iak i $20=\frac{4}{3}\times15$; idzie zatém, że tak $15\times16=15\times\frac{4}{3}\times12$; iako i $12\times20=12\times\frac{4}{3}\times15$. Tak

Tak téż ponieważ $8 : 28 = 10 : 35$, i $8 = \frac{2}{7} \times 28$, a $10 = \frac{2}{7} \times 35$; idzie zatém, że tak iest $35 \times 8 = 35 \times \frac{2}{7} \times 28$; iako też $28 \times 10 = 28 \times \frac{2}{7} \times 35$.

W ogólności zaś mówiąc, ieżeli iest $a : b = c : d$; i tak a, zámyká w sobié b, iak, i c, zamyká d razy n; będzie $a = n \times b$, i $c = n \times d$, a zatem tak $d \times a = d \times n \times b$. iako $b \times c = b \times n \times d$.

Obiaśniwszy to twiérdzénié na wielu przykładach, przystapi Nauczyciel do następuiącégo dowodzéniá.

Táb. XIII. *Fig. 3.* Niech będą dwa prostokąty: ABCD, BDEF, i boki iednego, AB, BC niech będą ſkraynémi tey proporcyi, któréy boki BD, BF drugiego prostokąta są śrzedniemi, toiest niech się má $AB : BF = BD : BC$, w takim razie té dwa proſtokąty są równé.

Wykréślénié. Ustáwmy tak té dwa proſtokąty, aby w kątach dwóch przeciwnych przy B ſchodziły się, i przedłużmy boki ich DC, EF, aż do zeyściá się w punkcie G.

Dowodz. Proſtokąty: AC, BG (w) których iednakowá ieſt wysokosć, maią się do

(w) Prostokąty zwykły się wyrázać przez dwie litery, na końcach przeciwnych dwóch kątów napisané.

do siebie, iak ich Podſtawy AB, BF. Prostokąty także BE BG, iednakowéy wysokości, maią się do siebie, iak ich Podſtawy BD, BC. Aże z podaniá ieſt liniiá AB, do BF, iak liniiá BD : BC; więc téż i prostokąt AC tak się má do proſtokątu BG, iak proſtokąt BE, do proſtokątu BG; czyli Proſt : AC: Proſt. BG=Proſt. BE: Proſt. BG, a zatém Proſt. AC=Prost. BE, co ſamo krócéy tak się wyráżá.

AC: BG=AB: BF

BE: BC=BD: BC

Aże AB: BF=BD: BC

więc AC: BG=BE: BG.

A zatém AC=BE.

229. *Wzaiémnie téż* (Reciproce *albo* e converso) dowieśdź można, że ieżeli dwa Proſtokąty są równé; wziąwszy dwa boki iednégo za ſkrayné, a dwa boki drugiégo za śrzednié wyrazy proporcyi, znáydziémy między témi bokami proporcyą.

W liczbah oczywiście się to pokazuie; bo gdyby boki dwa iednégo Proſtokąta wyrażoné były przez liczby: 10. i 42. a boki drugiégo przez 15, i 28, obadwa té proſtokąty zawiérałyby w ſobie 420, naprzykład ſtóp kwadratowych, toieſt, byłoby, 10×42=15×28, ſkądby wypadła ta proporcyá: 10:15=28:42.

Wy-

Wykréślénié Geometryczné do tego Twierdzénia służącé, nie odmiénné byłoby od poprzedzaiacégo. Dowodzénié także we środku dopiero działania różniłoby się, toieſt ponieważ.

AC: BG=AB: BF
i BE: BG=BD: BC
A przez podanié AC = BE.
więc AC: BG=BE:BG
A zatém AB: BF=BD:BC

230. *Wnioſki* 1. Ponieważ w proporcyi, tenże sám bydź może naſtępnik piérwszégo ſtósunku, co i poprzednik drugiégo; naprzykład: 8: 4=4: 2. albo, 8: 4: 2, przeto kwadrat ze śrzedniéy linii Geometrycznie proporcyalnéy, równá się téż Proſtokątowi z dwóch liniy ſkraynych: i znowu, ieżeli kwadrat równy iest proſtokątowi, bok kwadratu będzie liniią śrzednią proporcyonalną między bokami Proſtokąta.

Té podaniá były wyłożoné, w Rozdziáłach ſzóſtym, i ósmym, lubo ſposobém odmiénnym.

2. Można to samo przyſtósować i do równoległoboków, chociaż nie prostokątnych, byleby kąty iednégo, równé były kątóm drugiégo: także i do Tróykątów

które

które kąt iedén ſpólny maią: bo ieżeli ramiona ich około tego kąta są proporcyonalné, tak, żeby można wziąść dwa ramiona iednégo Tróykąta za ſkrayné; a dwa drugiégo za śrzednié; té dwa Tróykąty będą ſobie równé: i wzaiémnie, a to ſtąd wyniká, że takie Tróykąty, są połowami dwóch równoległoboków równokątnych, maiących za boki ramiona tego kąta ſpólnégo.

3. Przyſtósowanié to uczynić można, i do równoległoboków różnokątnych, biorąc zamiáſt boku iednégo, w obudwóch, wyſokość oznaczaną przez prostopadłą, ſpuſzczoną od końca boku iednégo na bok drugi, tak dalece, że té dwa równoległoboki będą równé, gdy Podſtawa i wysokość iednégo będą mogły bydź wzięté za dwie linije ſkrayné, a podſtawa i wysokość drugiégo za dwie linije śrzednié proporcyonalné: i wzaiémnie, ieżeli té cztéry linije będą proporcyonalné, równoległoboki będą téż równé.

4. Jeżeli cztéry linije ſą w proporcyi, można zawſze odmiénić mieysce dwóm śrzednim, lub dwóm ſkraynym, a nawet i dwie śrzednie położyć na mieyſcu dwóch ſkraynych, lub ſkrayné na mieyſcu śrzednich, nie psuiąc proporcyi: ponieważ przy takich odmianach, proſtokąt z śrzednich równy iednakowo będzie prostokątowi z ſkraynych.

231.

231. *Twierdz:* 2. Gdy przez punkt iaki w kole, lub za kołem poprowadzimy dwie liniie, któreby okrąg koła przecinały po obudwóch ftronach; proftokąt ze dwóch części iedney z tych liniy zawartych między tym punktem i okręgiem koła, będzie równy Proftokątowi z dwóch części drugiey liniy zamkniętych także między tym punktem, i koła okręgiem.

Tab. XIII. Fig. 4. 1. Niech będzie w kole punkt A, przez który przeciągnione są cieńciwy BC, ED; Proftokąt, EA×AD równy ieft Proftokątowi, BA×AC.

Wykreśl: Poprowadźmy liniie, BD, EC.

Dowodz: Tróykąty BAD; EAC, są do siebie podobne, kąty ich albowiem w wierzchołku A przeciwne; są równe, i kąty B, E, (189) równe; iako obeymuiące ramionami fwemi tenże sam łuk CD. Będą więc boki tych Tróykątów proporcyonalne; i AB: AE=AD: AC. a zatem AB×AC=AE×AD.

Tab. XIII. Fig. 5. 2. Niech będzie punkt A, za kołem, od tego punktu ciągniymy dwie Liniie AB, AE, przecinaiące okrąg koła, iedna w B, i C, a druga w E i D. Proftokąty AB×AC, i AE×AD, będą równe.

Wykreśl: Poprowadźmy liniie BD, EC.

Dowodz.

Dowodz: Tróykąty, BAD, EAC, maią kąt A, ſpólny i kąty B, i E równé, bo wſparté ramionami na tym samym łuku CD; więc té Tróykąty maią boki proporcyonalné; i AB:AE==AD: AC, a zatém, AB×AC=AE×AD.

To Twiérdzénié zwykło się ieſzcze i tak wyrážać.

1. Jeżeli dwie ciénciwy przecinaią się w kole, części ich będą *odwrotnie* (inverse, *albo*, in ratione inversa) proporcyonalné, toiest, tak się będzie miała część iednéy ciénciwy, do części ciénciwy drugiéy; iak się má drugá część ciénciwy drugiey, do drugiéy części ciénciwy piérwſzéy.

Dwie tedy części ciénciwy iednéy, będą śrzedniémi proporcyi, a dwie części ciénciwy drugiéy będą ſkraynémi téyże proporcyi.

2. Gdy dwie liniie przecinaiącé koło, wychodzą od iednégo punktu za kołém; są odwrotnie proporcyonalné z częściami témi, któré za koło wychodzą, toiest, tak się má iedna przecinaiącá do drugiéy, iak się má część drugiéy za kołém, do części piérwſzéy także za kołém: iedna tedy przecinaiącá, i część iéy za kołém są śrzedniémi w proporcyi, a druga przecinaiacá, i część iey także za kołém, są ſkraynémi téy saméy proporcyi.

232. *Uwága. W piérwszym razie.* Gdy iedna z ciénciw iest śrzednicą koła, a drugá do niéy prostopadłą; ta prostopadłá na dwie równé części będzie od śrzednicy podzielona, i Prostokąt z dwóch części śrzednicy, będzie rowny kwadratowi z połowy drugiéy ciénciwy. Prostopadłá tedy spuszczoná od któregokolwiek punktu koła, na śrzednicę, iest śrzednią Geometrycznie proporcyonalną między dwiéma częściami śrzednicy: który to przypádek szczególny, i wyżéy iuż iest dowiedziony.

W drugim razie. Gdy iedna z liniy zamiást coby miała przecinać koło, iest *styczną* (tangens) iego, możná ią uwáżać iak przecinaiącą koło, ale tak, że część iéy w kole niknie dlá małości, i dwa iéy punkta przecięciá schodzą się w punkt iedén.

W tym razie Prostokąt iedén, odmiéniá się na kwadrat z stycznéy. I stąd wyniká to wielkiéy wági podanié: że ieżeli od iednégo punktu, wychodzą dwie liniie, iedna przecinaiącá koło, a drugá styczná z kołém, kwadrat z stycznéy równać się będzie Prostokątowi z całéy linii przecinaiącéy, i z części iey za kołém: toiest, że styczná iest śrzednią Geometryczną między całą przecinaiącą, i częścią iéy za kołém. Następuiącé, dowodzénié iest ieszcze iaśnieyszé, i bardziey pod oczy podpádaiącé. Niech

Niech będzie AD, styczna, AB zaś przecinaiąca koło, i od tegoż samego punktu A poprowadzona. Ta styczna AD iest śrzednią Geometryczną między przecinaiącą AB, i iey częścią, AC, za kołem. Táb. XIII. *Fig. 6.*

Wykreśl: Od punktu dotknięcia D, poprowádźmy dwie liniie: DB, DC.

Dowodz: Tróykąty: ABD, ADC, są do siebie podobne: maią albowiem spólny kąt A, i kąt odcinka, ADC, równy kątowi w odcinku na przemian ABD (195) a zatém i trzeci kąt w jednym Tróykącie równy iest kątowi trzeciému w drugim: będą więc tych Tróykątów boki proporcyonalne, i AB:AD=AD:AC, toiest, kwadrat z styczney AD, równy będzie Prostokątowi z AB przez AC.

233. W szczególności zaś niech będzie styczna AT, i przecinaiąca AD, od tegoż samego punktu A poprowadzona, przez śrzodek C, koła. Táb. XIII. *Fig. 7.*

Pociągniymy promień CT do punktu dotknięcia T: kwadrat z linii AC, równy będzie summie kwadratów z AT, i CT, toiest, równy będzie summie z Prostokąta AD przez AB, i z kwadratu BC. Skąd wynika tén wniosek, że ieżeli śrzednicę BD, podzielimy na dwie równe części w punkcie C, i potém na iéy przedłużéniu, weźmiemy iakikolwiek punkt na

przykłád A; Prostokąt z całéy téy linii i z iéy przedłużéniá ($AD \times AB$) z przydanym kwadratém, z połowy śrżednicy (BC^2) równać się będzie kwadratowi i linii złożonéy z połowy śrzednicy, i z iéy przedłużéniá (AC^2) toiest będzie $AD \times AB + BC^2 = AC^2$.

234. *Zagád*: 1. Maiąc dany Prostokąt, i kwadrat, znaléźć dwie liniie, któreby tak się miały do siebie, iak się maią, tén Prostokąt i kwadrat.

Rozwiąz: Zamiéńmy Prostokąt dany na inszy iému równy, któryby za bok iedén, miáł bok kwadratu: czyli (co na iedno wychodzi) szukáymy czwártéy linii proporcyonalnéy do boku kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta. Bok kwadratu, tak się mieć będzie do téy czwártéy proporcyonalnéy, iak się má kwadrat do Prostokąta.

To postępowanié zgádzá się zupełnie z tém, co się iuż powiedziało w Arytmetyce (*na karcie* 89. i 90.) a co tu przez różné przykłady, podobné następuiącému obiaśnić ieszcze należy.

Wziąwszy bok kwadratu za spólną miarę, albo za iedność, niechby bok iedén Prostokąta, zawiérał w sobie 5. razy bok kwadratu, a drugi 7. razy. Czwártá liniiá proporcyonalná do boku tego

tego kwadratu, i do dwóch boków Prostokata, zawierałaby w sobie 35. razy bok kwadratu, tak, iako i cały Prostokąt, zawierałby w sobie 35. razy cały kwadrat.

235. Przystósowanie. Podobnym sposobem postąpimy sobie chcąc znaleźć dwie liniie, któreby tak się miały do siebie, iak się maią dwa Prostokąty, toiest, szukać będziemy czwartey proporcyonalney do boku iednego Prostokata, i dwóch boków drugiego: do tey albowiem czwartey proporcyonalney tak się mieć będzie drugi bok pierwszego Prostokąta, iak się maią powierzchnie tychże Prostokątów.

Możnáby to samo wykonać, szukaiąc sposobem wyżey wyrażonym (234) stósunku każdego z dwóch Prostokąta, do tegoż samego kwadratu, znaleźlibyśmy albowiem, że powierzchnie tych dwóch Prostokątów tak się maią do siebie, iak się maią dwie czwarte proporcyonalne do boku kwadratu, i dwóch boków każdego z osobna Prostokąta.

Niechbyśmy naprzykład znaleźli, że Prostokąt ieden, który nazywam P. zawiera w sobie kwadrat K, tyle razy, ile razy liniia L, zawiera w sobie bok B, kwadratu, toiest, że P:K=L:B.

Niech-

Niechbyśmy znowu znaleźli, że drugi Prostokąt Q, zawiéra w sobie tén sám kwadrat K, tylé razy, ilé razy liniiá M, zawiéra w sobie bok B tegoż kwadratu, toiest, że Q:K=M:B. Wnoszę stąd, że Prostokąty P, Q, tylé razy zawiérać będą ieden drugi, ilé razy się zawiéraią liniie L. M. iedna w drugiéy, toiest, że będzie, P:Q=L:M.

Jakoż ieżeli prostokąt P. zawiéra w sobie kwadrat K, dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy, a prostokąt Q, zawiéra naprzykład 6. razy kwadrat K: Prostokąt Piérwszy, będzie do Prostokąta drugiégo, iak są liczby; 2, 3, 4, i t. d. do liczby 6. A że téż i liniiá L. zawiéra w sobie bok, B. 2. 3, 4, i t. d. razy; więc téż i liniiá M zawiérać będzie bok B, razy 6. a zatém tak się má Prostokat P, do Prostokąta Q, iak liniiá L, do linii M.

Jeżeli tedy mámy dwie proporcye n p.
P: K=L: B.
i Q: K=M: B.

W których iednakowé są następniki; poprzedniki piérwszé obudwóch proporcyy tak się do siebie będą miały, iak poprzedniki drugié tychże proporcyy, toiest,
P:Q=L:M.

236. *Uwága.* W jednéy z dwóch dopiéro wyrażonych proporcyy, na przykład w dru-

w drugiéy, możná było odmienić mieyscé poprzednikóm, i następnikóm, i té samé proporcye tak wyrazić?

P: K=L:B.

K: Q=B:M.

Skąd wyniká P: Q=L:M.

237. *Defin.* Gdy będą trzy iakiékolwiek ilości iednakowégo gatunku stósunek piérwszey z nich, do trzeciéy nazywá się *stósunkiem składanym* (ratio composita) z stósunku piérwszey ilości, do drugiéy, i drugiéy do trzeciéy. J tak stósunek P. do Q, nazywá się składanym z stósunku P do K, i K do Q; Tak téż stósunek L do M będzie składanym z stósunku L do B, i B do M. Takié stósunki złożoné z stósunków równych są równé. I tak ponieważ stósunek P do K, i K do Q równy iest piérwszy stósunkowi L do B, drugi stósunkowi B do M; będzie téż i stósunek składany P do Q równy stosunkowi składanému L do M.

238. *Przyst:* 1. To, cò się tu powiedziało o stósunku składanym, dobrze będzie przystósować do reguły trzech składaney, o któréy mówiło się w Arytmetyce.

Przykład: Rzémieślnicy z jednakową pilnością prácuiący około iakiéy roboty, tym więcéy iéy zrobią, im większá będzie ich liczba, i czas dłuższy strawiony

na

na téyże robocie. Przeto gdy porównać chcémy dwie iednakowégo gatunku roboty, którémi się dwie kupy Rzémieślników zatrudniaią, trzeba rozmnożyć (iako się to iuż w Arytmetyce wyłożyło) liczby Rzémieślników przez liczby dni, przez które prácowali; a roboty przez tych Rzémieślników wygotowané, tak się będą do siebie miały, iak się maią tamté dwie liczby rozmnożoné.

Niechby naprzykład liczby Rzémieślników były do siebie, iak 2. do 3; a czasy przez które robili iak 5. do 7. Piérwszy stósunek 2. do 3. równá się stósunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 5. rozmnożonych, i będzie, iak 10. do 15. Drugi stósunek 5. do 7, równá się stósunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 3. rozmnożonych, i będzie iak 15: do 21. A zatém stósunek robót, który się równá stósunkowi 10. do 21, równy będzie stósunkowi składnému z stósunku 10. do 15, i 15, do 21; z których piérwszy równy iest stósunkowi 2. do 3, a drugi równy stósunkowi 5. do 7.

Podobnie rozumować można, gdy więcéy niż dwa będzie stósunków.

239. *Przystó*: 2. Wszystkié także działaniá o zamianach, i inné podobné, którémi zatrudnialiśmy się w Arytmetyce, zasadzały się na stósunkach złożonych

z dwóch

z dwóch lub więcéy stósunków równych: iako to bardzo łatwo w przykładach okázać możná.

240. *Przystó*: 3. Samé nawet niektóré działaniá, któré zda ą się bydź tylko zwyczayném mnożéniém, możná podciągnąć pod stósunek skłádany.

Przykłád 1. 15. Czerwonych złotych iléż czyni groszy Polskich?

Aby znaléźć wartość 15. czerwonych złotych w groszach, zwyczaynie obrácaią się czerwoné złote na złote, a té potém na grosze. Rozwiążémy teráz to zadanié, rozkłádaiąc ié na stósunki poiedyncze, i szukaiąc stósunku z nich złożonégo, a to dlá pokázaniá, że czasém i nie myśląc o tém, używámy w saméy rzeczy stósunku skłádanégo.

Stósunek wartości 15. czerw: do wartości w groszach, składá się z stósunków następuiących:

1. Wartość 15. czer: zł: do wartości 1. czer: zł: iest, iak - - 15. do 1.

2. Wartość 1. czer: zł: do wartości 1. złotégo iak - - - 18. do 1.

3. Wartość 1. złotégo do wartości 1. grosza iak - - - 30. do 1.

4. Stósunek z tych trzech złożony iest iak - - - - 8 100 do 1.

Więc

Więc 15. czerwonych złotych czyni groszy - - 8 100.

Przykład 2. Osoba 30. lát maiącá, iléż minut żyła, rachuiąc w Roku dni 365?

Stósunek 30. lát do iednéy minuty składá się z stósunków następuiących:

Z Stósunku 30 lát do 1. roku, toiest, - - - - - 30 do 1

Z Stósunku 1. roku do 1. dnia, toiest; - - - - - 365 do 1,

Z Stósunku 1. dnia do 1. godziny, toiest, - - 24 do 1,

Z Stósunku 1. godziny do 1. minuty, toiest, - - - 60 do 1,

Stósunek z tych wszystkich złożony iest - 15768000. do 1.

A zatém w 30 latach iest minut - - - 15768000.

241. *Przystós.* 4. Widzieliśmy wyżéy że dlá znalezieniá stósunku dwóch Prostokątów, trzeba było iedén z nich zamienić na inszy, któryby miał bok równy bokowi w drugim Prostokącie, albo (co na iedno wychodzi) trzeba było znaléźć czwártą liniią proporcyonalną do iednégo boku iednego Prostokata, i dwóch boków drugiégo: i że tak się má pierwszy Prostokąt do drugiégo, iak się má drugi bok pierwszégo

wſzégo prostokąta, do téy czwártéy linii proporcyonalney. Zwyczaynie to podanié tak się wyráżá: *że ſtósunek dwóch Proſtokątow ſkłádá się z stósunków ich boków.* Co tak okázać możná.

Niech będą dwa boki iednégo Proſtokąta nazwané, A i B, a dwa boki drugiégo proſtokąta, C i D. Szukáymy czwártéy linii proporcyonalnéy trzém bokóm B, C, D, i ta niech będzie L, toiest niech będzie, B:C=D:L, ſtósunek linii A, toiest, drugiégo boku piérwszégo proſtokąta, do L, równy będzie ſtósunkowi piérwszégo proſtokąta, do drugiégo (225.) A że ſtósunek A do L ſkłada się z stósunków, A do D, i D do L; ſtósunek zaś A do D, iest ſtósunkiém boku iednégo, iednégo Proſtokąta do boku drugiégo, drugiégo Proſtokąta, a ſtósunek D do L, równa się ſtósunkowi drugich dwóch boków B i C (bo było, B:C=D:L:) *więc ſtósunek dwóch Proſtokątów, ſkłádá się z ſtósunków ich boków.*

242. *Przyſt.* 5. Gdy dwa Proſtokąty, które z sobą porównywać mámy, sa kwadratami; ponieważ boki kwadratu są wszyſtkié równé; kwadrat iedén tak się mieć będzie do kwadratu drugiégo, iak się má bok iedén piérwszégo kwadratu do trzeciéy linii proporcyonalnéy z tym bokiém, i z bokiém drugiégo kwadratu. Niech na przykład A i B, będą boki tych dwóch

kwa-

kwadratów, a C, niech będzie liniiá trzeciá proporcyonalná do tych boków, kwadrat pierwszy tak się mieć będzie do kwadratu drugiégo, iak się má A do C.

243. *Defin.* Tén ſtósunek A do C, ſkłádá się z ſtósunku A do B, i B do C. Jako zaś té dwa oſtatnié ſtósunki są równé: bo kładliśmy A do B, iak B do C, albo A: B: C, tak ſtósunek z nich złożony, nazywá się *dwumnożnym*, (Ratio duplicata), że wykładnik iego, iest kwadratém iednego z wykładników, dwóch pierwszych ſtósunków.

Niechby boki dwóch kwadratów miały się do siebie, iak 1 do 2; Powiérzchnie tych kwadratów będą do siebie w tym samym ſtósunku, w którym ieſt 1. do 4; trzeciá téż liniiá proporcyonalná do 1. i 2, ieſt 4: a zatém té dwa kwadraty tak się do siebie mieć będą, iak się má bok iednégo z nich do trzeciéy linii proporcyonalnéy.

Jeżeli boki dwóch kwadratów będą do siebie, iak 2, do 3, powiérzchnie ich będą, iak 4, do 9; trzeciá téż liniiá proporcyonalná do 2 i 3, iest: $\frac{9}{2}$ a ſtósunek 2 do $\frac{9}{2}$ ieſt tén sám, co i ſtósunek 4 do 9.

Jako ſtósunek piérwſzéy naprzykład linii do trzeciéy *ciągło* (continue) proporcyonal-

nalnéy, nazywá się ſtósunkiém dwumnożnym ſtósunku piérwszéy linii do drugiéy; tak znowu ſtósunek pierwszéy téy linii do drugiéy, nazwać można ſtósunkiém *dwudzielnym* (ratio subduplicata) ſtósunku linii piérwszéy do trzeciéy. J tak gdy trzy liniie przez liczby oznaczoné: 1, 2, 4, są ciągło proporcyonalné, toieſt, 1 do 2, iak 2 do 4: albo 1: 2; 4. Ponieważ piérwszá do trzeciéy, toieſt, 1 do 4 ieſt w ſtósunku dwumnożnym piérwszéy do drugiéy, toieſt iak 1^2 do 2^2; będzie znowu 1. do 2. w ſtósunku dwudzielnym 1, do 4, toieſt; iak $\sqrt{1}$. do $\sqrt{4}$.

244. *Zagádn*: 2. Maiąc dany kwadrat iedén, znaléźć drugi, któryby do piérwszégo był w danym ſtósunku.

Rozwiąz: Danému ſtósunkowi znáydźmy inszy równy, maiący za poprzednika bok kwadrata danégo. Między tym poprzednikiém, i naſtępnikiém iego, szukáymy śrzedniéy proporcyonalnéy, ta będzie bokiém kwadratu żądanégo.

Albo tak: Złączmy wpróſt z sobą dwie liniie, maiącé do siebie tén sám stósunek, który maią dwa wyrazy, naprzykład dwie liczby dané. Na téy linii ze dwóch złożonéy, iako na śrzednicy, nakréślmy półkole, i od punktu ich łączěniá się wynieśmy proſtopadłą, aż do okręgu. Od punktu zeyściá się proſtopadłéy z okręgiém poprowádź-

wádźmy dwie liniie do dwóch końców śrzednicy; kwadraty tych dwóch liniy mieć będą do siebie ſtósunek; a zatém ieżeli iedna z nich równá ieſt bokowi kwadratu danégo; równá będzie bokowi kwadratu, którégo ſzukamy. Jeżeli zaś pierwszá nie równá ieſt bokowi kwadratu danego; to trzeba na niéy, zacząwſzy od punktu iéy przecięciá z okręgiém, wyznaczyć liniią równą bokowi kwadratu danégo i od punktu naznaczonégo prowadzić równoodległą od śrzednicy, a ta równoodległá przetnie drugą liniią w tym punkcie, który wyznaczy długość linii kwadratu szukanégo.

To Zagádniénié przyſtósować należy do przykładów Arytmetycznych:

Przykłád: 1. Znaléźć kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$, kwadratu danégo, toieſt, któryby tak sie miáł do niego, iak 3, do 5.

Bok kwadratu danégo dzielę na dwie części, któreby tak się miały do siebie iak 2 do 3. Na tymże boku, iak na śrzednicy kréślę półkole, a od punktu podziáłu wynoſzę proſtopadłą aż do iéy spotkaniá się z okręgiém. Od tego punktu ſpotkaniá prowadzę liniią do końca śrzednicy, w tę ſtronę, gdzie część iéy większá znáyduie się. Ta liniiá będzie bokiém kwadratu szukanégo.

Przy-

Przykład: 2. Maiąc dany kwadrat dobrać mu drugi, któryby tak się miał do niego, iak 5, do 3.

Liniią równą bokowi danégo kwadratu przeciągniymy daley, aż takich 5. części zamykać w sobie będzie, iakich 3 nie przeciągnioná zamykała.

Na téyże linii tak przeciągnionéy, iak na śrzednicy nakréślmy półkole, i od punktu, od którégo ieſt przedłużoná, wynieśmy proſtopadłą aż do okręgu, i od tego punktu, gdzie go ſpotyká, poprowádźmy liniią do końca tego śrzednicy, gdzie część iéy równá się bokowi danégo kwadratu. Ta oſtatniá liniia będzie wymiarém boku kwadratu, którégo szukámy.

245. *Uwága.* Rozwiązanié Arytmetyczné takowych zagádnień zasádzá się na wyciągnieniu piérwiáſtku kwadratowégo.

Gdy na przykład znaléźć potrzeba kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$ kwadratu danégo, toieſt, któryby tak się miał do niego iak 3 do 5; rozmnożywszy obiedwie té liczby przez 5, będzie 3 do 5, iak 15 do 25; więc kwadrat, którégo ſzukámy tak się mieć będzie do kwadratu danégo, iak 15. do 25: a zatém bok kwadratu, którégo ſzukámy, będzie do boku kwadratu danégo, iak ieſt liczba, która przez siebie rozmnożoná czyni 15, do liczby, którá

przez

przez siebie rozmnożoná czyni 25: toiest, iak pierwiastek kwadratowy z 15. do 5. Trzeba tedy wyciagnąć pierwiástek kwadratowy z 15, i tén pokáże wielkość boku kwadratu szukanégo, toiest trzeba znaléźć śrzednią liczbę proporcyonalną między dwiéma danémi, 3 i 5: rozmnożywszy iedné przez drugą, i z rozmnożonéy liczby 15, pierwiástek kwadratowy wyciągnąwszy.

Działanié więc Geometryczné zmierzaiącé do znalezienia śrzedniéy linii proporcyonalnéy między dwiéma danémi, iest to samo, co w Arytmetyce wyciaganié pierwiástku kwadratowégo z liczby danéy: co można i tém potwiérdzić, że kwadrat liczby śrzedniéy Geometrycznie proporcyonalnéy między dwiéma inszémi, równá się tymże dwóm liczbóm przez siebie rozmnożonym: a zatém ta śrzedniá liczba znáydzie się, wyciagaiąc pierwiástek kwadratowy z tych dwóch liczb, iednéy przez drugą rozmnożonych.

Gdyśmy wyżéy Geometrycznie szukali kwadratu, któryby miał się do kwadratu danégo w danym stósunku; szukaliśmy przez wykreślénié, śrzedniéy linii Geometrycznie proporcyonalnéy między dwiéma w danym stósunku będącémi, i ta śrzedniá liniiá była bokiém kwadratu szukanégo.

246.

246. Przyſtósować z łatwością można Podania dopiero wyłożone do inszych iakichkolwiek figur proſtokreślnych, i do siebie podobnych. Pokaże się to naprzód na Proſtokątach podobnych, potém na Tróykątach, naoſtatek w ogólności na iakichkolwiek figurach proſtokreślnych.

Gdy będą dwa Proſtokąty podobne, i na ich dwóch bokach odpowiadaiących sobie zrobimy dwa kwadraty; te dwa Proſtokąty, tak siebie mieć będą, iak te dwa kwadraty.

Niech będą dwa proſtokąty podobne, ABCD, abcd; ich powierzchnie, tak się do siebie mieć będą, iak się maią powierzchnie kwadratów ABEF, abef, zrobione na bokach odpowiadaiących sobie; AB, ab. Jakoż Proſtokąt ABCD, tak się ma do kwadratu ABEF, iak wysokość AD do wysokości AF=AB, toieſt. Táb. XIV. *Fig.* 1.

ABCD: ABEF = AD: AB.

Podobnie abcd: abef. = ad: ab.

Aże dlá podobieńſtwa proſtokątów, iest też AD: AB = ad: ab, więc

ABCD: ABEF = abcd: abef.

albo ABCD: abcd = ABEF: abef.

To samo ieszcze wyłożyć można sposobem naſtępuiącym:

Tab. XIV. Fig. 2. Niech dwie podstawy dwóch Prostokątów podobnych będą do siebie iak 5 do 3; wysokości ich będą też w takowym stósunku 5 do 3: a zatém ieżeli podzielimy iednę podstawę na 5, a drugą na 3, równé części, wysokość także, iednę na 5 części równych; a drugą na 3 równé pierwszym; powierzchnie tych dwóch Prostokątów będą mogły bydź podzielone, pierwszá na 25, a druga na 9 części równych w obudwóch Prostokątach, tak iak też i kwadraty na tych samych podstawach zrobione mogłyby bydź podzielone, ieden na 25, a drugi na 9. równych kwadracików: Ztąd wypływá, że i Tróykąty prostokątné podobné, tak się maią do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie: bo takie Tróykąty są w samey rzeczy połowami prostokątów podobnych, i maiących też samę, co oné, podstawę i wysokość.

247. Możná ieszcze przystósować to samo i do iakichkolwiek Troykątów podobnych: ponieważ albowiem w podobnych Tróykątach, wysokości są między sobą, iak Podstawy; zatém prostokąty, któreby miały téy wielkości podstawy i wysokości, co i Tróykąty, byłyby podobné i miałyby się do siebie w stósunku dwumnożnym ich boków, albo iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie (246); więc i Tróykąty, iako połowy tychże prostokątów, będą do siebie w stó-

w ſtósunku także dwumnożnym ich boków.

Jaśniéy to wyłożyć można, gdy ſtósunki boków wyrażone będą przez liczby.

Niech będzie Tróykąt iakikolwiek, którego podwoiliśmy wſzyſtkie trzy boki. Tén drugi Tróykąt zmieści w sobie 4 Tróykąty, z których każdy przyſtanie do piérwszégo. Táb. XIV. *Fig.* 3.

Jeżeli w tymże piérwszym Tróykącie bok każdy potroimy; tén drugi Tróykąt zamknie w sobie 9. Tróykątów, z których każdy przyſtanie do piérwszégo.

Jeżeli znowu każdy bok w piérwszym Tróykącie tak przedłużymy, żeby dłuższy był 4, 5, 6, i t. d. razy; tén drugi Tróykąt pomieści w sobie, 16, 25, 36, i t. d. Tróykątów, mogących przyſtać do piérwszégo.

Przeto, ieżeli boki Tróykąta iednégo zawiéraią w sobie 1,2,3,4,5,6,7,8,9 .. razy boki innégo Tróykąta; powiérzchniá piérwszégo Tróykąta zawiérać będzie powiérzchnią drugiégo, 1,4,9, 25, 36, 49, 64, 72, 81. - - razy.

Podobnie, powiérzchnie kwadratów, których boki zawiéraią 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. - - razy bok innégo kwadratu, będą

zawiérać powiérzchnią tego drugiégo kwadratu, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 72, 81. -- razy.

Gdyby boki dwóch Tróykątów podobnych miały się na przykład do siebie, iak 5, do 7; możnáby w piérwszym Tróykącie umieścić 25, a w drugim, 49 równych Tróykątów, których wszystkich boki przystacby mogły do siebie; a zatém powierzchnie tych dwóch Tróykątów miałyby się do siebie, iak 25, do 49, toiest, iak powiérzchnie dwóch kwadratów, których boki byłyby do siebie iak 5, do 7.

Nakoniec, możná tego samégo dowieśdź sposobém podobnym, iakośmy dowodzili, że kwadraty maią się do siebie w stósunku dwunmożnym ich boków, (242)

I tak, gdy będą dwa iakiékolwiek Tróykąty podobné, do których dwóch boków odpowiadaiących sobie, znáyduiémy trzecią linią, ciągło proporcyonalną; powiérzchniá iednégo Tróykąta, tak się mieć będzie do powiérzchni drugiégo, iak bok piérwszégo Tróykąta, który wzięty iest za pierwszy wyráz proporcyi, do téy trzeciéy linii proporcyonalnéy.

Táb. XIV. Fig. 4. Niech będą dwa Tróykąty podobné, ABC, abc, znáydźmy AD trzecią ciągło proporcyonalną do boków AB, ab, i tę

samę

samę AD przenieśmy na liniią AB od A do D. Powierzchniá Tróykąta ABC, będzie do powierzchni Tróykąta abc, iak AB do AD.

Wykréślénié. Poprowádźmy liniią CD. Ponieważ dlá popobieństwa Tróykątów iest AB: ab=AC: ac, a przez wykréślénié AB: ab=ab: AD, będzie więc, AC: ac=ab: AD: a zatém Tróykąty cab, CAD, maią kąty A i a rówńé, i ramiona około tych kątów *na odwrot* proporcyonalné: będą tedy té dwa Tróykąty równé co do powiérzchni, a przeto stósunek Tróykąta ABC, do każdégo z nich będzie iednakowy. A że stósunek tegóż Tróykąta ABC, do Tróykąta ADC, równy iest stósunkowi linii AB, do linii AD; więc też i Tróykąt ABC tak się mieć będzie do Tróykąta abc, iak liniiá AB do linii AD, toiest, w stósunku dwumnożnym boków AB, ab.

Idzie, stąd, że i równoległoboki podobné są także między sobą w stósunku dwumnożnym ich boków: ponieważ takié równoległoboki dwa razy w sobie zamykaią Tróykąty podobné.

248. Możná także było równie dokładnie dowiéśdź, że Tróykąty podobné ABC, abc, są między sobą w stósunku dwumnożnym ich boków AC, ac: a zatém, że stósunek dwumnożny AB do ab, równy iest stó-

ſtósunkowi dwumnożnému AC, do ac, toiest, że ſtósunki dwumnożné z równych ſtósunków, są równé: co też iuż się ogólnie pokazało, mówiąc wyżéy o ſtósunkach ſkładanych z jnszych ſtósunków.

Jakoż niech będą trzy iakiékólwiek ilości ciągło proporcyonalné, A, B, C, i drugié trzy ciągło także proporcyonalné, a, b, c, i w równym z piérwszémi stósunku. Stósunek ſkładany A do C, równy będzie ſtósunkowi, ſkładanému *a* do *c*, toieſt, A; C=a: c.

Bo ponieważ ſtósunek A do B równy wzięliśmy ſtósunkowi a do b, będzie.

$$A:B=a:b;\ \text{A że}\ A:B=B:C$$
$$\text{i}\ a:b=b:c$$

Więc $B:C=b:c$

a zatém $A:C=a:c$

W liczbach to samo iaśniéy się okazuie.

Niech będą trzy liczby ciągło proporcyonalnę 8, 4, 2, i drugié trzy ciągło także i równie proporcyonalné, 12, 6, 3, będzie, 8: 2=12: 3.

Ponie-

Ponieważ albowiém równé są ſtósunki 8 do 4, i 12. do 6, będzie.

$$8 : 4 = 12 : 6 ; \text{ A że, } 8 : 4 = 4 : 2$$
$$\text{i } 12 : 6 = 6 : 3.$$

Więc $4 : 2 = 6 : 3$

A zatém $8 : 2 = 12 : 3.$

249 *Podanié przybrané:* Gdy mámy iakiżkolwiek zbiór ſtósunków równych, których wyrazy wszyſtkié iednakowégo są gatunku; summa wszyſtkich poprzedników, tak się mieć będzie do summy wszyſtkich naſtępników, iak każdy w szczególności poprzednik, do swégo naſtępnika.

Bo ieżeli każdy z osobna poprzednik dwa, trzy, cztery i t. d. razy, zamyká w sobie swoiégo następnika; wszystkié téż razém poprzedniki zamykać będą wszystkié razém następniki dwa, trzy, cztéry i t. d. razy: a zatém summa wszystkich poprzedników, tylé razy zamykac będzie summę następników, ilé każdy z osobna poprzednik, swégo następnika.

I tak niech będą równé stósunki, 64 do 32. 50 do 25. 42 do 21. 30 do 15. 24 do 12. 18 do 9. 10 do 5. 8. do 4. 6 do 3. 4 do 2. 2 do 1. Summa wszyst-

kich

kich poprzedników =258, a summa wszystkich następników =129; będzie tedy, 258: 129 =64: 32: albo =50: 25; albo =42: 21 i t. d.

250. *Twierdzenie* 3. Jakiezkolwiek są Figury prostokreślne podobne, zawsze te do siebie będą w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących sobie.

Tab. XIV. *Fig.* 5. *Wykreśl*: Od wierzchołków dwóch kątów odpowiadaiących w obydwóch figurach, poprowadźmy przekątne do inszych kątów, do których mogą bydź poprowadzone.

Dowodzenie. Dwie te figury będą podzielone na Tróykąty, które z osobna brane w jedney figurze, będą podobne Tróykątóm odpowiadaiącym w drugiey figurze. Każdy zaś w szczególności Tróykąt w jedney figurze, będzie do Tróykąta odpowiadaiącego sobie w drugiey figurze w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących; wszystkie tedy Tróykąty, z których się składá iedna figura, będą poprzednikami, a wszystkie tróykąty pierwszym odpowiadaiące, z których się składá drugá figura, będą następnikami tamtych; a zatem summa wszystkich Tróykątów, które składaią iedne figurę, toiest (ta cała figura) tak się mieć będą do summy wszystkich Tróykątów, z których się składá drugá figura

(toiest

(toiest do tey drugiéy całéy figury), iak się má każdy w szczególnosci Tróykąt w jedney figurze, do Tróykąta odpowiadaiącego w drugiéy figurze, toiest, w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących w tych dwóch figurach.

Wszystko zatém, cokolwiek się powiedziało o stósunku dwóch kwadratów i o sposobie znaleziénia kwadratów, któréby się miały do siebie w danym stósunku, może bydź przystósowané do iakichkolwiek figur prostokreślnych podobnych.

251. Aby Figurę iaką prostokréślną zrobić podobną i równą danym dwóm inszym podobnym figuróm prostokréślnym; trzeba tym końcem postawić Tróykąt prostokątny, dáwszy mu za ramiona dwa boki odpowiadaiące sobie w dwóch figurach danych podobnych, a przeciwprostkątná tego Tróykąta, będzie bokiém odpowiadaiącym w figurze, któréy szukámy.

252. Gdy cztéry liniie składaią proporcyą, i na dwóch piérwszych, wyrażaiących ieden stósunek, zrobimy dwie iakiekolwiek figury podobné, a na dwóch drugich, wyrażaiących drugi stósunek, zrobimy inszé dwie iakiekolwiek figury podobné; w takim razie stósunek dwóch pierwszych figur, równy będzie stósunkowi

kowi

kowi dwóch drugich, bo tak stósunek dwóch piérwszych figur, iako i stósunek dwóch drugich, iest stósunkiém dwumnożnym ze dwóch równych stósunków.

Práwdzi się to w szczególności, gdy wszystkié cztéry figury są sobie podobné; a tém widoczniéy ieszcze się okázuie, gdy té cztéry figury są kwadratami.

253. Maiąc dwie proporcye, których wyrazy wszystkié są liniiami, Prostokąt z poprzedników dwóch piérwszych stósunków, w każdéy proporcyi tak się mieć będzie do Prostokąta z dwóch ich następników, jak Prostokąt z poprzedników, drugich dwóch stósunków do Prostokąta z jchże następników.

Należy to obiaśnić naprzód na przykładach liczebnych, pokazuiąc, że gdy będą dwie proporcye w liczbach wyrażoné, poprzedniki dwóch piérwszych stósunków, w obudwóch proporcyach, ieden przez drugi rozmnożoné, tak się mieć będą do swoich następników przez siebie także rozmnożonych; iak i inszé dwa poprzedniki, ieden przez drugi rozmnożoné, do swoich następników podobnie rozmnożonych.

Przykład. Niech będzie: $14 : 7 = 6 : 3.$
i znowu $15 : 5 = 12 : 4.$
będzie też $14 \times 15 : 7 \times 5 = 6 \times 12 : 3 \times 4.$
toiest. $210 : 35 = 72 : 12.$

To

To co na liczebnych przykładach widocznie się pokaże, trzeba ieszcze stwiérdzić rozumowaniém podobném nastepuiącému. Jeżeli poprzednik w piérwszéy proporcyi iest dwa razy na przykład większy od swégo następnika, a poprzednik w drugiéy proporcyi, trzy razy na przykład iest większy od swégo także następnika; tedy rozmnożywszy pierwszégo poprzednika, piérwszéy proporcyi, przez piérwszégo poprzednika drugiéy proporcyi, poprzednik z tych dwóch rozmnożony, będzie dwa razy trzy, toiest sześć razy większy, od następnika podobnie z dwóch następników piérwszych, w obudwóch proporcyach rozmnożonégo; a że i drugié dwa poprzedniki, są, iedén dwa razy, á drugi trzy razy, większé od swoich następników; więc tak piérwszy poprzednik ze dwóch piérwszych poprzedników rozmnożony, iak i drugi poprzednik ze dwóch drugich rozmnożony, będzie sześć razy większy od swoiégo następnika podobnie rozmnożonégo; któré to rozumowanié przystósować można i do każdégo inszégo wykładnika.

Niech litery A, B, C, D, wyrážaią cztéry linie składaiącé piérwszą proporcyą, i niech litery a, b, c, d, wyrážaią drugié cztéry linie składaiącé drugą proporcyą, toiest: niech będzie, A:B=C:D. i a : b = c: d; będzie též A×a : B×b = C×c : D×d. Bo

Bo náprzód A : B = Aa : Ba.
i podobnie C : D = Cc : Dc.
A że - A : B = C : D.
Więc - - - Aa : Ba = Cc : Dc.
Tak też znowu; a : b = Ba : Bb.
c : d = Dc : Dd.
A że - a : b = c : d
Więc - - - Ba : Bb = Dc : Dd.
Stósunek tedy złożony z stósunków:
Aa : Ba.
i Ba : Bb.

Toiest stósunek Aa : Bb, równá się stósunkowi złożonému z stósunków
Cc : Dc.
i Dc : Dd.
Toiest stósunkowi, Cc : Dd.
albo co na iedno wychodzi, Aa : Bb = Cc : Dd.

ROZDZIÁŁ X.
O wielokątach forémnych.

254. *Defin:* Gdy wielokąt má wszystkie boki i kąty równe; nazywá się *Wielokątem forémnym* (Polygonum regulare.)

255.

255. *Wniosek.* Ponieważ ważność wszystkich razém kątów wielokąta, zawisła tylko od liczby boków iego (85) gdy tedy wszystkié kąty wielokąta są równé, ważność iednégo z tych kąta, zawisła tylko od liczby boków tegoż wielokąta. Stąd idzie, że wielokąty forémné, iednakową maiącé liczbę boków, kąty téż wszystkié maią równé, i boki proporcyonalné; są więc do siebie podobné. Możná tedy przystósować im to wszystko, co się w ogólności o figurach podobnych powiedziało.

Wiémy iuż sposób wykréślénia Tróykatą równoboczného i kwadratu na linii danéy; wiémy téż iak wpisać w Tróykąt równoboczny, lub na nim opisać koło.

Wpisanié w koło dané, Tróykąta równoboczného, i opisanié tegoż koła Tróykątém, łatwiéy się wykonywá przez wykréślenié *Sześciokąta* forémnégo (Hexagonum.)

256. *Twiérdz:* 1. Bok sześciokąta w koło wpisanégo, równy iest promiéniowi tegoż koła.

Niech będzie ABCDEF sześciokąt forémny, w koło wpisany; bok którykolwiek tego sześciokąta n.p: AB, równy iest promiéniowi SB tegoż koła. Táb. XV. *Fig. 2.*

Wy-

Wykréślénié. Poprowádźmy promiéń SA.

Dowodz: Kąt ASB, zamyká szóstą część, cztérech kątów prostych, toiest $\frac{2}{3}$ iednégo kąta prostégo: a że trzy kąty Tróykąta ASB, składaią dwa kąty prosté; więc dwa kąty A i B tegoż Tróykąta, razém wzięté są różnicą między dwóma kątami prostémi i $\frac{2}{3}$ iednégo kąta prostégo, toiest, czynią $\frac{4}{3}$ kąta prostégo. Ponieważ zaś té dwa kąty są sobie równé; więc każdy z nich będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostégo: a zatém wszystkié trzy kąty Tróykąta ASB są równé, i dlá tegoż téż i boki wszystkié trzy równé będą. Będzie tedy bok AB, sześciokąta foremnégo (czyli ciénciwa 60. stopniów) równy promiéniowi koła opisanégo.

257. *Wniosek* 1. Aby więc wpisać sześciokąt foremny w koło dané, dosyć iest przénieść 6. razy, iako ciénciwę, promiéń tego koła, na okrąg iego.

258. *Wniosek* 2. Poprowadziwszy liniią AC, będzie ona ciénciwą trzeciéy części okręgu koła, a zatém będzie bokiém Tróykąta równobocznégo wpisanégo w dané koło. Pociągnąwszy tedy liniie AE, CE, Tróykąt ACE, będzie Tróykątém równobocznym w koło wpisanym.

259. *Twierdzénie*: 2. Gdy w koło wpisany będzie Tróykąt równoboczny, a przez wierzchołki kątów iego, pociągniémy styczné z kołem tak daleko, aż się z sobą znidą; té styczné zrobią Tróykąt równoboczny na kole opisany.

Niech będzie ABC Tróykąt równoboczny wpisany w koło SABC; przez wierzchołki A, B, C, tego Troykąta prowadzoné styczné koła, aż do spotkaniá się ich z sobą w punktach D, E, F, zrobią Tróykąt równoboczny na kole opisany. Táb. XV. *Fig.* 2.

Wykréślénié. Pociągniymy promiénie SA, SB, SC.

Dowodz: Którykolwiek z kątów w śrzodku koła, naprzykład kąt ASB, i iému przeciwny kąt E, między dwiéma stycznémi zawarty, czynią razém dwa kąty prosté. A że kąty wszystkié trzy we śrzodku koła są równé; więc równé będą i kąty trzy od stycznych zrobioné; a zatém i Tróykąt DEF będzie równoboczny.

Łatwo więc opisać można dané koło Tróykątém równobocznym, wpisáwszy pierwéy w toż koło Tróykąt także równoboczny.

260. W ogólności zaś mówiąc: niechby

by był iakikolwiek wielokąt forémny w koło wpisany; ieżeli przez wszystkié wiérzchołki kątów tego wielokąta poprowadzimy styczné koła, tak, aby każdé dwie blizkié z sobą się spotykały; Wielokąt, który z tych stycznych zrobi się, będzie także forémnym.

Dowodz: We wszystkich czworokątach takich, iak na przykład ASBE, kąty miedzy dwiéma stycznémi zawarté, iak na przykład kąt E, będą równé, a zatém wszystkié kąty tego Wielokąta będą równe.

Wszystkié także Tróykąty, iak na przykład ABE będą równoramienné, i kąty w jednym Tróykącie, równé będą kątom w drugim, i podstawy w nich, iak na przykład iest podstawa AB, będą równé: a zatém wszystkié té Tróykąty mogą przystać do siebie, i stąd boki iednego Tróykąta równé będą bokóm drugiégo. Więc summa dwóch takich równych boków iednakowá zawsze będzie. A że na przykład EF iest summą dwóch takich równych boków Wielokąta opisanégo; więc wszystkié boki tego Wielokąta równé będą.

261. *Twiérdz:* 3. W każdy Wielokąt forémny, możná wpisać iedno koło, i drugié koło na nim opisać, a obadwa té koła, spólny mieć będą srzodek.

Niech

Niech będzie iakikolwiek ſześciokąt forémny, ABCDEF, można zawsze wpisać weń koło, i drugié na nim opisać, a té dwa *koła* będą *ſpolśrzodkowé.* (circuli concentrici.)

Dowodz: Od śrzódka dwóch boków blizkich, na przykład od G, i H, wyprowadziwszy dwie proſtopadłe: GS, HS; punkt S przecięcia ich, iednakowo będzie odległy od trzech wierzchołków blizkich A, B, C (według tego co się iuż powiedziało o opisaniu kołem Tróykąta) będą tedy równé liniie AS, BS, CS; a zatém Tróykąty SBC, SBA równe względém siebie boki mieć będą, i ieden Tróykąt przyſtać może do drugiego: a w szczególnosci kąt SBC, równy iest kątowi SBA, i każdy z nich czyni połowę kąta w wielokącie, toiest kąta ABC. A że też równé są i kąty SCB, SBC; więc i kąt SCB, będzie połową kąta w Wielokącie, a zatém kąt SCD, będzie drugą iego połową. Maią więc Tróykąty: SCD, SCB ſpólny bok: SC, równe boki: CD, CB, i kąty w C między niemi zawarte, równé. Mogą tedy i té dwa Tróykąty przystać do siebie, a w szczególności liniie SB, SD równé będą. Więc to koło, którego śrzodkiém iest S. i któré przechodzi przez punkta blizkié: A, B, C, przechodzić także będzie i przez punkt następuiący: D. Podobnym ſposobem pokazać można, że toż koło przechodząc przez punkta: B, C, D, prze-

Tab. XV. *Fig.* 3.

chodzić będzie i przez punkt E, i t. d.

Wszystkie promienie: SA, SB, SC, SD, i t. d. dzielą w wierzchołkach na dwie równe części, kąty Wielokąta, iako się pokazało: a zatém dwa Tróykąty na przykład SBH, SBG, mogą przystać do siebie, bo maią kąty proste przy H i G, bok spólny: SB, i kąty przy B równe; a w szczególności linie SH, SG są równe; toż samo możnaby dowieść i względem inszych prostopadłych spuszczonych od śrzodka S, na boki wielokąta. Punkt tedy S, iest iednakowo odległy od wszystkich boków Wielokąta, a zatem iest śrzodkiem koła, któreby wpisać można w Wielokąt.

262. *Twierdz:* 4. Maiąc Wielokąt foremny w koło wpisany, a przeciąwszy na dwie równe części łuk, którego cięciwą, iest bok tego Wielokąta, i od punktu każdego takiego przecięcia poprowadziwszy linie do dwóch końców łuku, zrobi się z tych liniy inszy wielokąt foremny, tyle dwoie co pierwszy boków maiący.

1. Wszystkie boki tego nowego wielokąta będą równe, bo będą cięciwami połowy łuków równych.

2. Wszystkie także kąty tego Wielokąta, będą równe, bo każdy z nich będzie dwa razy większy od kąta przy podstawie Tróykątów równoramiennych, i przystać do siebie

siebie mogących, które za boki, maią promienie koła.

Ten tedy Wielokąt, bedzie miał wszystkie boki i kąty równe, a zatém będzie forémnym.

Podobnym sposobém dowieśdź możnáby, że ieżeli boki Wielokąta, są cienciwami tyluż części równych koła, ile Wielokąt má boków; ten Wielokąt będzie forem.nym: a zatém wykreślenie Wielokąta foremnego, któryby zamykał w sobie pewną liczbę boków danych, zależy od tego, aby podzielić okrąg koła na daną liczbę części równych.

263. *Zagádn:* Na danym kwadracie opisać, i wpisać weń koło; i znowu w dane koło wpisać, i opisać na nim kwadrat.

Rozwiąz: 1. Prowadzę dwie przekątne w kwadracie: punkt przecięciá ich, będzie śrzodkiem koła, które wpisać w kwadrat, i opisać na nim mámy.

2. Prowadzę dwie śrzednice w kole, iednę do drugiey prostopadłą. Końce ich będą wierzchołkami kwadratu wpisać się w koło mogącego: przez te wierzchołki pociągnąwszy styczne koła, te zrobią kwadrat na kole opisany.

264. *Wniosek* 1. Kwadrat opisany na

P2 kole,

kole, równá się kwadratowi śrzednicy iego, i dwa razy ieſt więkſzy od kwadratu wpisanego.

265. *Wniosek* 2. Z tego co się wyżey powiedziało, wynika, że przez *poddziały*, (subdivisiones) ciągłe łuków na dwie części rowne, można wpisać w koło Wielokąty, których liczba boków byłaby naſtępuiącá.

3, 6, 12, 24, 48, 96, albo w ogólności. 3×2^n (x)

4, 8, 16, 32, 64, 128, albo w ogólności. 4×2^n

Przeſtr. Za pomocą samego liniiału i Cyrkla nié można z zupełną dokładnością i pewnością. (to iest bez szukaniá takowego podziáłu cyrklém) podzielić łuk każdy na 3, 5, 7, i t. d. części równych: a zatém z takową samą pomocą, nié można zawsze wykreślić takie Wielokąty, których liczba boków wyrażałaby się przez liczby rozmnożné, z 3. lub 4, i t. d. przez 3, raz lub więcéy razy wzięté.

266. *Twierdz:* 5. Powiérzchniá Wielokąta opisanego na kole, a w szczególności

(x) Co znaczą té wyrazy: 3×2^n, 4×2^n. dá się poznać w Algiebrze.

ści Wielokąta forémnégo równá się Tróykątowi maiącému za wysokóść promień tego koła, a za podstawę *obwód* (Perimeter) tego Wielokąta

Wykréśl. Od śrzodka koła poprowádźmy liniie do wszystkich wiérzchołków Wielokąta.

Dowodz. Wielokąt podzielony będzie przez té liniie, na tylé Tróykątów, ilé má boków; Tróykąty zaś té maią za wysokość promień koła, a za podstawę boki Wielokąta; więc powiérzchniá tych wszystkich Tróykątów, czyli powiérzchnia Wielokąta równá iest iednému Tróykątowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta.

267. *Wniosek.* Gdy rozmaité Wielokąty opisané są na iedném kole; ich powiérzchnie mieć się do siebie będą, iak obwody.

268. *Twiérdzénié 6.* Powiérzchniá Wielokąta forémnégo, w koło wpisanégo, równá się Tróykątowi maiącému za wysokość promień tego koła, a za podstawę, obwód wielokąta inszégo forémnégo w toż koło wpisanégo, a tylko połowę tylé boków maiącégo.

Nie-

Táb. XV. Fig. 1. Niecháy na przykład sześciokąt ABCD EF, wystawiá nám iakikolwiek Wielokąt forémny, w koło wpisány, powiérzchniá tego sześciokąta równá iest Tróykatowi maiącému za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Tróykąta równobocznégo, w toż samo koło wpisanégo.

Dowodz: Poprowádźmy promień SB przecinaiący w punkcie G, bok Tróykąta równobocznégo. Tróykąt ASB, uwáżać możná, iak gdyby miáł podstawę SB, a wysokość AG, Tróykąt także CSB uważać można, iak gdyby miáł podstawę SB, a wysokość CG: a zatém czworokat AS CB równa się Tróykątówi, któryby miáł albo wysokość AC, a podstawę SB. Toż mówić i o inszych Czworokątach, zawartych między dwóma Wielokąta bokami przyległémi, i dwoma promieniami; summa więc powiérzchni, wszystkich tych czworokątów, toiest powiérzchnią Wielokąta forémnégo w koło wpisanego, równá się takiemu Tróykątowi, któryby miáł za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta inszégo forémnégo, w toż koło wpisanégo, a połowę tylé boków maiącego.

Przykłád. Powiérzchniá Dwunastokąta forémnégo w koło wpisanégo, równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość, pro-

promién tego koła, a za podstawę obwód sześciokąta, w toż koło wpisanégo, albo, (co na iedno wychodzi) równá się Prostokątowi, któryby miał za wysokość, promién tego koła, a za podstawę, ténże promién trzy razy wzięty.

Ta więc powiérzchniá iest trzy razy większá od kwadratu promiénia, i iest równá $\frac{3}{4}$ kwadratu śrzednicy.

Twiérdzénié to stósuie się tylko do Wielokątów, których boki są párzysté; następuiącé Twiérdzenié przystósować możná do wszystkich ogólnie Wielokątów forémnych.

269. *Twiérdz:* 7. Powiérzchniá Wielokąta foremnégo w koło wpisanégo, równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość prostopadłą spuszczoną od śrzodka koła do boku wielokąta, a za podstawę obwód iego. (y)

Dowodz: Prostopadłą tę uważać możná, iák promién koła wpisanégo, lub wpisać się mogącégo w Wielokąt: a zatém twiérdzénié to iest tylko przystósowaniém wyższégo (266.)

270.

(y). Taká w szczególności prostopadła nazywá się z Greckiégo apothema.

270. *Wniosek.* Jeżeli od punktu iakiégokolwiek w Wielokącie forémnym, nawet i w tym, którégo boki tylko wszystkié są równé, spuścimy prostopadłe do wszystkich iego boków; té prostopadłé dodané do siebie, iednakową zawsze długość uczynią.

Jakoż poprowadziwszy od tego samégo punktu dwie linie do dwóch końców iednégo z boków, powiérzchniá Tróykąta, témi liniiami zakończoná, równá będzie Tróykątowi maiącému za podstawę bok wielokąta, a za wysokość prostopadłą nań spuszczoną: albo, co na iedno wychodzi, powiérzchniá ta równá będzie Tróykątowi maiącému za wysokość bok Wielokąta, a za podstawę, prostopadłą nań spuszczoną: a zatém powiérzchniá całégo Wielokąta równać się będzie Tróykątowi, któryby miał za wysokość bok tego Wielokąta, a za podstawę summę wszystkich prostopadłych na boki iego spuszczonych. A że powiérzchniá takowégo Tróykąta iest zawsze iednakowá, i wysokość także iednakowá; więc i podstawą, czyli summa wszystkich prostopadłych iednakowá zawsze będzie, z którégokolwiek punktu Wielokąta, oné spuścimy.

WSTĘP

WSTĘP DO ROZDZIAŁÓW XI. i XII.

O używaniu Przenośnika, Cyrkla proporcyonalnégo, i o Podziele nazwanym Nonniuszém.

271. *Defin. Przenośnik* (Transportator) iest to półkolé, którégo okrąg podzielony iest na stopnie, albo, gdy większy będzie, na półstopnie, i ćwierci stopniów. Táb. XVI.

272. *Zagádn.* 1. Maiąc dany kąt na papiérze, znaléźć liczbę stopniów, którą w sobie zamyká.

Sposób. 1. Przykładám śrzodek przenośnika do wiérzchołka kąta danégo, a podstawę tegoż przenośnika do iednégo z ramión kąta; łuk przenośnika zawarty między ramionami kąta, pokáże w stopniach ważność iego.

Sposób 2. Od wiérzchołka kąta danégo, iak od śrzodka, promieniém równym promieniowi przenośnika, kréślę łuk zawarty między ramionami kąta, odległość dwóch końców tego łuku przenoszę cyrklém na okrąg przenośnika, od końca śrzednicy, która mu służy za podstawę; łuk przenośnika między końcém śrzednicy i drugim punktém,

któm, gdzie drugie ramię Cyrkla przypadnie, zawarty, pokaże w stopniach ważność kąta danego.

273. *Zagádn.* 2. Na linii daney, i przy punkcie na niey danym, zrobić kąt zawieraiący w sobie daną liczbę ſtopniów.

Sposób 1. Położywſzy na linii daney przenośnik, tak, aby śrzednica iego, do tey linii przystawała, a śrzodek do punktu danego, naznaczám na papierze punkt, któremu odpowiádá punkt przenośnika ukazuiący liczbę daną ſtopniów, ten punkt łączę liniią z punktem danym, a ta liniiá uczyni z daną kąt, którego szukáłem.

To działanie będzie dokładnieysze, gdy przenośnik má sobie przydany promień ruchomy około śrzodka iego.

Sposób 2. Od punktu danego, iak od śrzódka, promieniem równym promieniowi przenośnika; kreślę łuk, i na ten, wziętą na przynośniku liczbę stopniów danych przenoszę, od punktu przecięciá linii z tym łukiem, aż do drugiego punktu na tymże łuku. Punkt ten ostatni złączywszy liniią z punktem danym na drugiey linii, te obiedwie liniie zamykać będą kąt którego szukáłem.

274. *Zagádn*: 3. W dane koło, wpisać

Wielo-

Wielokąt foremny o pewnéy liczbie boków.

Rozwiąz. Szukám kąta w śrzodku tego Wielokąta; ciągnę promień iakikolwiek, i robię na nim kąt równy kątowi w śrzodku Wielokąta, maiący śrzodek koła danégo za wierzchołek; łuk tego koła zawarty między ramionami kąta, będzie miáł za cięciwę bok Wielokąta danégo.

275. *Zagád.* 4. Na danéy linii wykréślić Wielokąt foremny o pewnéy liczbie boków.

Rozwiąz. Przy dwóch końcach danéy linii robię dwa kąty równé połowie kąta, przy obwodzie Wielokąta, którego szukám. Punkt przecięciá ramión tych dwóch kątów będzie śrzodkiém koła, w któré wpisać się dá Wielokąt, o tylu bokach, ilé ich dano, i tey wielkości, iakiéy iest liniiá daná.

276. *Uwága.* Używanié przenośnika, wyciągá wielkiéy báczności. Jm większy promień mieć będzie, tym mniéy obáwiać się trzeba znacznieyszégo iakiégo uchybiéniá.

Między inszémi narzędziá tego niedostatkami, iest tén mianowicie, że promieniá w nim odmiénić nié możná według okoliczności; ale tén niedostatek zastąpić

ſtąpić może w potrzebie insze narzędzie nazwane *linią cieńciw* (liniiá chordarum) w cyrklu proporcyonalnym.

Táb.XVII. 277. Na obudwóch ramionach cyrkla proporcyonalnégo, znáyduie się *liniiá cieńciw*, któréy podziáły zaczynaią się we śrzodku (*in centro*) tego narzędziá: a kończą tam, gdzie iest liczba 180, albo w mnieyszych narzędziach tam, gdzie ieſt liczba 60. Odległości śrzodka od inszych punktów podziáłu, pokazuią wielkość cieńciw wyznaczoną przez *rachunek* (per calculum) albo przez figurę dokładna. Ta wielkość cienciw wyznaczoná iest w półkole, którégo promień równá się odległości śrzodka cyrkla proporcyonalnégo od punktu podziáłu naznaczonego liczbą 60. a to z przyczyny równości cieńciwy 60, ſtopniów z promieniem.

Ponieważ rozwiazanie cztérech poprzedzaiacych zagádnień iedynie zawisło od wyznaczeniá cieńciwy łuku, to iest od wielkości iéy względem promieniá; możná wiec cztéry téZagádnieniá rozwiazać, używaiac, iednégo tylko ramieniá w cyrklu proporcyonalnym, biorąc za promień koła odległość punktów: 0, i 60.

Dwa razém ramiona tego cyrkla ſłużą do odmienieniá; promienia; náymnieyszym będzie, odległość dwóch punktów 60, i 60. gdy cyrkiel proporcyonalny zupełnie

ieſt

ieſt zamknięty ; powiększonym zaś będzie przez odległość większą tychże punktów, gdy cyrkiel coraz więcey otworzymy : a naywiększym będzie, gdy cyrkiel wcale tak otworzymy, że ramiona iego w prostey będą linii.

Niechby na przykład tak był otworzony cyrkiel proporcyonalny, aby odległość dwóch punktów 60. i 60, czyniła połowę odległości iednego z tych punktów, od śrzodka; będzie też i odległość drugich punktów odpowiadaiących sobie na przykład 40 i 40, połową odległości iednego z nich od śrzodka ; a zatem odległość ta punktów: 40, i 40, oznaczyłaby cienciwę ſtopniów 40, albo 40°, w kole, którego promień równałby się odległości punktów 60 i 60; bo cięciwy łuków podobnych, w kołach różnych tak się maią do siebie, iak tychże kół promienie. W ogólnosci więc mówiąc: gdy za promień weźmiemy odległość punktów 60. i 60, na linii cieńciw, iakażkolwiek insza odległość dwóch punktów na teyże linii, naznaczonych iednakową liczbą, będzie cieńciwą łuku, o tylu ſtopniach, ile wyraża ta liczba.

Stąd wynika ſposób, którego użyć wygodnie można, chcąc rozwiązać cztery poprzedzaiące zagadnienia, przez liniią cienciw, i odmieniaiąc iak się podoba promień.

278.

278. *Przykład* 1. Na daney linii i przy punkcie na niey także danym, zrobić kąt o pewney liczbie ſtopniów.

Rozwiąz: Weźmy iakikolwiek promień; otwórzmy cyrkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych liczbą 60, była równa temu promieniowi. Od punktu danego, iak od śrzodka, promieniem tymże nakreślmy łuk koła, i daymy mu cięciwę równą odległości dwóch punktów naznaczonych liczbą daną ſtopniów.

279. *Przykł:* 2. Na daney linii wykreślić Wielokąt foremny iakikolwiek.

Rozwiąz. Szukaymy kąta, iaki bydź powinien we śrzodku Wielokata żądanego, otwórzmy cyrkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych na linii cięciw tą liczbą, iaka iest liczba ſtopniów kąta, we śrzodku Wielokąta, równała się linii daney; na teyże linii wyſtawmy Tróykąt równoramienny, dawszy mu za ramiona, linije równe odległości punktów naznaczonych liczbą 60; wierzchołek tego Tróykąta, będzie śrzodkiem koła, w które wpisać można Wielokąt żądany.

280. *Uwaga.* Co do wykreślenia Wielokątów foremnych w ſzczególności: aby się obeyśdź można bez ſzukania kątów we śrzod-

śrzodku, znáyduie się na cyrklu proporcyonalnym osobná liniiá Wielokątów, za którey pomocą, zacząwszy od Tróykąta, lub czworokąta, aż do dwunastokąta wykreślić można. Odległość śrzodka, tego narzędziá, od punktu 6, tey linii Wielokątów, wziąwszy za promień, albo za bok Sześciokąta foremnego w koło wpisanego, odległości tegoż śrzodka od punktów: 3, 4, 5, i t. d. pokażą wielkość boku Wielokąta forémnégo, który wpisać można w to samo koło, o tylu bokach, ilé znaczą liczby: 3, 4, 5, i t. d. *Albo téż:* otworzywszy do woli cyrkiel proporcyonalny, i wziąwszy na linii Wielokątów za promień odległość punktów 6, i 6; odległości inszych dwóch punktów: 3 i 3, 4 i 4, 5 i 5, i t.d. pokażą bok Wielokąta forémnégo o téyże saméy liczbie boków wpisanégo w to koło, do którégo za promień wzięliśmy odległość punktów 6 i 6.

281. Trzeciá liniiá, którą na cyrklu proporcyonalnym znáyduiémy, a wielkiégo iest użytku, nazywá się *liniią części równych.* Na obudwóch cyrkla proporcyonalnégo ramionach, mámy liniią podzieloną na 200. części równych, a czasém, gdy cyrkiel mnieyszy, na 120, mniéy lub więcéy. Jakożkolwiek tén cyrkiel otworzymy, odległość dwóch Punktów naznaczonych tą samą liczbą na przykład 200, będzie dwa razy

wię-

większá od odległości punktów naznaczonych liczbą 100, cztery razy większa od odległości dwóch punktów, 50, i t. d. a mówiąc ogólnie, odległość dwóch iakichkolwiek punktów tą samą liczbą naznaczonych, będzie się tak miała do odległości dwóch inszych punktów przez ieduakową także liczbę naznaczonych; iak się maią do siebie też liczby.

282. *Używanie* 1. Maiąc daną liniią, podzielić ią na pewną liczbę części równych.

Niechby na przykład podzielić trzeba liniią daną na 5 części rownych.

Otwórzmy tak cyrkiel proporcyonalny, aby odległość punktów naznaczonych liczbą podzielną przez 5, równá była linii daney: niech na przykład odległość ta będzie punktów naznaczonych liczba 200; weźmy piątą część tey liczby, toiest 40; a odległość tych dwóch punktów naznaczonych liczbą 40; będzie częścią piątą linii daney.

283. *Uwaga*. Ostatnią tę odległość znalezioną przenosząc 5 razy na liniią daną, uchybienie któreby zayśdź mogło w jey wielkości, byłoby 5 razy powtorzone, a zatém tak powtorzone, mogłoby się stać znacznym, chociaż każde z osobna było nieznaczne. Przytrafić się to może, osobliwie w ten czas, gdy na

wiele

wiele części dzielić przychodzi liniią. Aby więc tego powtárzaniá uniknąć, lepiéy będzie wziąźć osobno $\frac{4}{5}$ linii, toiest odległość dwóch punktów: 160, i przenieść ią, od obudwóch końców na liniią daną: toż uczynić, wziąwszy potém $\frac{3}{5}$ linii i t. d.

284. *Używanie.* 2. Maiąc daną liniią znaleźć inną, którąby do niéy była w pewnym stósunku, w liczbach wyrażonym, na przykład iak 4. do 7.

Przenieśmy liniią daną na dwa punkta naznaczone liczbą podzielną przez 7, na przykład na dwa punkta: 140; $\frac{4}{7}$ téy liczby 140, są 80; odległość tych dwóch punktów: 80, będzie liniią, któréy szukaliśmy.

285. *Uważanie* 3. Maiąc dane w liczbach trzy boki Tróykąta, wykreślić go.

Przykład: Niechby trzy boki Tróykąta miały bydź iak trzy liczby: 150, 147, 128.

Otwórzmy iakokolwiek cyrkiel proporcyonalny: odległości dwóch Punktów: 150, dwóch punktów: 147, i dwóch punktów 128, będą do siebie, iak boki dane; a zatém mogą bydź wzięte za te boki.

286. *Używanie* 4. Maiąc dany Tróykąt iuż wykréślony, którego podſtawa zamyká na przykład 100, ſznurów, znaleźć wielkość inszych dwóch boków.

Przenieśmy podſtawę daną na dwa punkta: 200; zmiérzmy cyrklém długość dwóch innych boków, i przenieśmy ią znowu na punkta dwa iednakową liczbą naznaczone, tam gdzie przypadnie; liczby dwie, na które długość tych dwóch boków przypadnie, wyrážać będą długość tychże boków w sznurach.

Opuszczám inszé używaniá, gdzie wykréślenié Geometryczné, krótszé iest częſto i pewnieyszé; iak na prz. w znaleźieniu kwadratu równégo ſummie dwóch inſzych danych, albo więcéy.

287. *Uwága* 1. Gdy kto nié má cyrkla proporcyonalnégo, może na mieyscé iego, a czasém i lepiey użyć linii podzielonéy na wielé części równych.

288. *Uwága* 2. Gdy część náymnieyszá, któréy nám do podziału potrzeba, iest bardzo małá, a liczba części których szukámy znacznie wielká; w takim razie trudno iest mieć wſzystkié, na téyże saméy linii, podziáły, tak aby ié dobrze rozeznać možná. Udámy się więc w podobnym razie do ſposobu następuiącégo:

Niech

Niechby podaná była liniiá, którá zbyt ieſt małá, aby ią widocznie na 10, części podzielić możná; trzeba osobno té części wynaléźć od 1, aż do 10. Táb. XV. *Fig.* 4.

Rozwiąz. Przez dwa końce téy linii prowadzę, po iednéy ſtronie dwie równoodległé. Na té równoodległé przenoszę od końców linii danéy dziesięć równych części; każdy Punkt podziału w iednéy równoodległey, łączę linią z punktém odpowiadaiącym mu na drugiey równoodległéy. (Te linie łączące będą równoodległé od linii danéy) Od końca iednego linii danéy, ciągnę liniią poprzeczną do końca drugiego linii ostátniéy równoodległéy; od danéy ta poprzeczná liniiá wyznaczy na równoodległych od linii danéy, części których ſzukałém.

Maiąc daną liniią bardzo małą, do podzieleniá na 100. równych części, ale iednak tak wielką, aby mogła bydź widocznie podzieloną na 10, równych części; podzielić ią tak, aby tyle zaraz części równych wyznaczyć na niéy możná, ilé zechcémy, zacząwszy od 1, aż do 100. Táb. XV. *Fig.* 5.

Rozwiąz. Podzielmy tę liniią na 10. równych części; przez pierwszy punkt podziału, i przez drugi koniec téy linii, wyciągniymy dwie równoodległé iakiékolwiek, (zręczniéy iednak, i wygodniéy ieſt, aby mało co od prostopadłych uchy-

 bia-

biały:) Przenieśmy znowu na té dwie równoodległé 10, części równych, albo mało różniących się od części linii daney.

Złaczmy drugi koniec linii daney, od którego nie była prowadzona równoodległá, z ostatnim punktém podziału, równoodległéy bliższéy; złączmy także i punkta iedney równoodległéy z punktami odpowiadaiącémi na drugiéy, i przeciągniymy ié aż do linii ostatniéy nie równoodległey. Nakoniec przez wszystkie punkta podziáłu linii daney prowádzmy równoodległé od dwóch piérwszych równoodległych, co z łatwością przyidzie, przeniózłszy podziáły linii daney, na liniią iéy przeciwną i łączącą końce dwóch piérwszych równoodległych, i złączywszy liniiami punkta podziáłu odpowiadaiącé. Po takiém wykréśléniu mieć zaráz możná tylé co chcémy, części równych na linii daney, zacząwszy od 1. aż do 100.

Trzeba na przykład znaléźć nám części 64, takich, iakich linii daná má 100.

Stáwmy ramié iedné cyrkla zwyczaynégo na punkcie śrzednim, 4, i otwórzmy cyrkiel széroko, aż drugié ramié iego przypadnie na przecięcié dwóch liniy których końce naznaczoné są liczbami: 4 i 60. Ta otwartość cyrkla, dá nám liczbę części, których szukaliśmy, i t. d.

Prze-

Przedłużaiąc liniią daną i wſzyſtkié od niey równoodległé, aż póki té przedłużénia nie będą równé linii danéy wziętéy ráz, dwa razy, trzy razy -- dziesięć razy, otrzymámy taką liczbę części, iaką zechcémy, zacząwszy od 1, aż do 200, 300, 400. -- 1000.

Taká *podziálka* (scala) iest do używaniá náywygodnieyszá, gdy kto nié má cyrkla proporcyonalnégo, dlá tego téż i náywięcéy iéy używaią.

289. Jnny sposób do wynaleziéniá części równych linii danéy, tak małey, że iéy podzielić widocznie nié możná na części żądané, iest tén, który się nazywá *podziáłém Nonniusza*, a który raczéy nazywaćby się powinién podziáłém *Verniera*, z przyczyny, że tak zwáł się prawdziwy podziáłu tego wynalázca.

Niechby na przykład przyszło podzielić na 30. równych części liniią tak małą, że widocznie na niéy części tych wyznaczyć nié możná, niechby iednak była téy wielkości, że możná ią wyraznie podzielić na 5, albo 6, części równych.

Podzielmy tę liniią na przykład na 6. części równych, i drugą iéy równą na 5. równych także części. Różnica ſzóſtęy części piérwszégo podziału, od piątéy części drugiégo podziału, będzie równą różni- Táb. XV. *Fig.* 6.

cy

cy między $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$ częścią całéy téy linii danéy, toiest, będzie $\frac{1}{30}$ téy linii. Gdy tedy té dwie liniie tak ułożymy, że iedna będzie przy drugiey, i końce iedney wpróst będą na przeciwko końców drugiéy; odległość dwóch punktów piérwszégo podziału w obudwóch liniiach, będzie 30stą częścia daney linii; podobnie odległość dwóch punktów drugiego podziału (rachuiąc od tychże samych, co wyżey końców) będzie: $\frac{2}{30}$, odległość dwóch punktów trzeciégo podziału: $\frac{3}{30}$ czwártégo $\frac{4}{30}$, piątégo: $\frac{5}{30}$, albo $\frac{1}{6}$. częścią całéy linii danéy: toiest, jedną z tych części, na któré ta liniiá iest podzieloná.

Táb. XVII. 290. Czwártá liniiá, którá ieszcze zwykła się znaydować na cyrkiach proporcyonalnych, i któréy wykreślenie zasadzá się na tém; co się wyżéy już wyłożyło, nazwana iest *liniią Płaszczyzn* (linea Planorum)

Odległości śrzodka w cyrklu proporcyonalnym od punktów podziału téy linii, tak się maią do siebie, iak boki kwadratów, któré w tym samym stósunku byłyby do siebie, w którym są liczby przy tychże punktach wyrażoné. J tak gdyby kwadrat ieden był: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, razy większy od drugiégo; bok tego drugiego kwadratu większy byłby:

2,

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, razy od pierwszego; dla tego też odległości od śrzodka, punktów naznaczonych liczbami: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, tak się maią do siebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Szczupłość narzędzia nie pozwoliła daley tych podziałów rozciągnąć. Co się zaś tycze boków w kwadratach śrzednich między temi, które się dopiero wyraziły, można ie wyznaczyć przez figurę dokładną lub przez rachunek przybliżaiąc ich ważność do prawdziwey. J tak ieżeli odległość śrzodka od punktu: 1, będzie wyrażać bok kwadratu równy na prz: 12 iakim częściom; odległość tegoż śrzodka od punktu: 2; wyrazi bok innego kwadratu równy blizko 17. takimże częściom; albo gdy pierwsza odległość znaczy nap: 100, druga znaczyć będzie trochę więcey iak 141, i t. d.

Używanie w tem, dwóch ramion cyrkla proporcyonalnego, iest to samo, które było i do inszych liniy.

Ponieważ na przykład odległości śrzodka od punktów:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 62, maią się

Do siebie, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;
iak liczby. - - - więc też
i odległości dwóch punktów iednakową liczbą naznaczonych: 1.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,
Przy iakimkolwiek otwiéraniu cyrkla, mieć się będą iak liczby
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

Tož mówić i o innych liczbach pośrzednich.

Przystósowanié Niech będzie dany bok kwadratu iednégo; trzeba znaléźć bok innégo kwadratu, któryby był $1\frac{5}{6}$, piérwszégó.

Otwiérám tak cyrkiel proporcyonalny, aby dwa ramiona cyrkla zwyczaynégo, z otwartością równą bokowi danému, przypadły na dwa punkta linii płaszczyzn iednakową liczbą naznaczoné, któráby podzielona bydź mogła przez 6. na przykłád na dwa punkta: 60. Biorę $\frac{5}{6}$ téy liczby 60, toiest: 50, i nie odmiéniaiąc otwarciá cyrkla proporçyonalnégo, mierzę odległość dwóch punktów, 50: a ta będzie liniią którey szukám za bok kwadratowi, maiącému bydź $\frac{5}{6}$, kwadratu danégo; a že figury podobné maią się do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie, przeto działanié to przystósować równie možná do wszystkich figur podobnych.

ROZDZIÁŁ XI.

Piérwszé początki Miernictwa.

JEżeli gdzie nauka o figurach podobnych używaná bywá w praktyce, to ſzczególniéy gdy się wykréslaią na papiérze figury, choć w małości swoiéy, podobné tym, których są wyobrażéniém; i gdy wyznáczámy na karcie położénié punktów na polu na przykład znáyduiących się, których tam dlá różnych zawád wyznaczyć częſtokroć nié możná.

291. *Przykład* 1. Niech będzie izba kwadratowa, któréy bok zmierzony, má łokci 10.

Jakiéykolwiek, wielkości kwadrat odrysuiémy na papiérze, zawsze iego figura, podobną będzie do figury izby.

Żeby iednak patrząc na kwadrat na papiérze odrysowany, możná sobie wyſtawić wielkość téy izby trzeba położyć i oznaczyć *Podziálkę*, według któréy bok izby przenieśliśmy na papiér: bo inaczéy zapatruiąc się na tén ostatni kwadrat, poznalibyśmy, tylko iaká iest figura izby, a nie wiedzieli ieszcze, iaká iéy wielkość.

Gdyby ta izba była prostokątém, maiącym długość łokci na przykład 12, a szérokości łokci 8; odrysowáwszy na papié-

rze iakikolwiek prostokąt, którego dwa boki miałyby się do siebie, iak 12, do 8; tén prostokąt podobny do izby, wystawiłby nám iéy figurę, ale nie wielkość: która dopiéro w tén czas byłaby poznaná; gdyby się wyraziło, w iakiéy mierze to przeniesienie boków izby na papiérze stało się, czyli to przypisuiąc do boku odrysówanégo że łokci 12, ukazuie, czyli oznaczaiąc iaká iest długość na papiérze wyrážaiącá łokci 10. i t. d.

Mierząc podobnie długość i szérókość domów, dziedzińców, ulic, grubość murów i t. d. možná wyrazić na papiérze wszystkié té, iedné względém drugich położéniá i wielkość każdéy z osobna części np. budynku i t. d.

Možná potém i drobnieyszé części wyrazić, kładąc położéniá drzwi, okién, i t. d. aby pod iedén razém widok poddadź budynek cały z jego częściami.

Kilkakrotnie takowé roboty czyniąc, nabędą w nich Uczniowie coráz większéy łatwości.

292. *Przykłád* 2. Niech będzie na polu Tróykat, którego boki wszystkié zmiérzyć možná; iedén z tych boków zawiérá łokci: 180, drugi: 164, trzeci 148.

Zróbmy iakąkolwiek podziałkę, i według

dług niey zróbmy Tróykąt, którego trzy boki zawierałyby liczbę części równych z tey podziałki ieden: 180, drugi: 164. trzeci 148. Ponieważ ten mały Tróykąt ma boki w tym samym stosunku, w którym są boki Tróykąta wielkiego, na polu na przykład wymierzone; niczym więc od wielkiego Tróykąta różnić się nie będzie, tylko samą wielkością: a zatem będzie nam go mógł wyobrazić, i da nawet poznać samę wielkość iego, gdy na papierze wyrazimy podziałkę, którey do tego użyliśmy.

293. *Uwagi.* W ostatnim przykładzie długości do mierzenia, były przywiększe, a przeto gdybyśmy używali w takim razie krótkiey iakiey miary, na przykład łokcia, robota byłaby długa, i bardzo pracowita; nadewszystko uchybienia małe, ktorych się ciężko uchronić, w przykładaniach następnych, miary, zebrane razem, uczyniłyby omyłkę tym znacznieyszą, im częściey byłyby powtórzone. Z tego powodu, wniosło się używanie sążni, prętów, a nawet i sznurów, na mieysce łokci.

Do wymiarów tedy długości znacznieyszey, należy mieć sznur, a ieszcze lepiey łańcuch, który pewną liczbę łokci albo sążni w sobie zamyka. Daymy na przykład, że łańcuch ktorego używamy, ma w sobie 10. sążni. Takowy łańcuch

cuch, do długości 180 łokci, przyłożyć trzeba następnie sześć tylko razy, a iuż cała ta długość będzie wymierzona; będzie zatém wymiár i prędszy i pewnieyszy. W takowych wymiarach wielkiéy báczności potrzeba.

1. Należy bydź zapewnionym, że miary brané są w linii prostéy.

Tym końcém zostawuią się żérdzie, w pewney od siebie odległości, i w téy linii, którą mierzyć przypádá, tak, aby piérwszá żérdź zasłaniała następuiącé, a osobliwie drugi koniec linii do mierzéniá: trzeba także té żérdzie ustawić prostopadle (z) używaiąc do tego *Pionu* (Perpendiculum.)

2. Jeżeli na końcu linii do mierzéniá nie znáyduie się iaki cél znaczny, na przykład drzewo, rog domu, i t.d. trzeba tam osobliwie, gdy długość iest bardzo wielka, wystawić znak iaki, na przykład żérdź wysoką z chorągiewką, z táblicą białą na wiérzchu, lub z jnnym podobnym znakiém.

Trzeba ieszcze uważać, aby przykłada-

da-

(z) Liniią prostopadłą do iakiéy płaszczyzny, *poziomiy* (horizontalis) nazywać będziémy *Pionową* (verticalis.)

daniá następné miary, były w linii prostéy; według drogi od żerdziów wyznaczonéy. Przeto tén, co trzymá piérwszy koniec łańcucha lub sznura, powinién się postawić wprost żerdziów, i dadź znak drugiému trzymaiacému drugi koniec, aby i tén wprost niego stanął w téyże saméy linii; albo znowu trzecia osoba, stoiąc przy końcu iednym linii do mierzéniá, przestrzégać będzie, i uwáżać przykładaiących miarę, aby z linii prostéy nie zchodzili.

Trzeba się starać, aby przy każdém przykładaniu miary, łańcuch lub sznur, iak naybardziéy był wyciągniony: dlá tego należy go do saméy ziémi przystáwiać, ieżeli ta równá iest wszędzie: albo téż wspiérać go na podporach w pewnéy odległości zostawionych; a tym sposobém nachylénié, któré ciężár łańcucha, lub sznura sprawuie, będzie mniéy znaczné.

J dlá tegoć to, w robotach wielkiéy wági, i osobliwéy dokładności wyciągaiących, łańcucha, ani sznura używać nié możná.

5. Trzeba ieszcze mieć báczność, aby do tego samégo mieysca, gdzie się miara iedna skończyła, przykładać znowu koniec sznura, lub łańcucha. Dlá tego należy dlá znaku wbić zaráz żerdkę lub

kół

kół w to mieyscé, w któré́m się miara przeszła zakończyła, a następuiącá má się zaczynać.

6. Trzeba dobrze pamiętać, ilé razy się łańcuch, lub sznur w całym wymiarzé przykładał, i aby o tém dla iakiégo roztargnienia nie zapomnieć; lepiéy iest za każdym razém naznaczyć sobie to przykładanié, albo na karcie, albo wtykaiąc na końcu każdégo w szczególności wymiaru, znak iaki.

7. Bezpiecznié́y także iest, powtórzyć zawsze wymiár całéy długości.

8. Jeżeli polé do wymiérzéniá wcale, iest otwarté, i wolné; możná ié podzielić na Tróykąty; czyli to prowadząc wszystkié przekątné od iednégo rogu, czyli biorąc bok ieden, za spólną podstawę tylu Tróykątów, ilé będzie pozostałych rogów; czyli ieszcze wyznáczaiąc punkt w samém polu, i uważaiąc go iak wiérzchołek, albo raczéy zbiég tylu Tróykątów, ilé figura, którą odrysować chcémy, má boków. Zmiérzywszy potém wszystkié boki wszystkich tych Tróykątów, można będzie odrysować na papiérze figurę podobną.

294. *Przestroga.* Tén sposób postępowaniá, w odrysowaniu pola, mierząc w istocie wszystkié linile do tego potrze-

trzebné, i czasu wielé zabiérá, i rzádko nawet tráfiá się, aby polé tak było wolné, żeby na niém sposobu tego użyć można.

Jnszych zatém użyć trzeba w tym razie sposobów, któré się tu przytoczą, zaczynaiąc od łatwieyszych i prostszych. Postrzédz tu łatwo będzie można, iż używanié sposobów trudnieyszych i bardziéy zawikłanych, nie zawisło od prawideł Geometrycznych, których grunt ténże sám iest zawsze i iednakowá dokładność, ale z przyczyny niedoskonałości zmysłów naszych, i ręcznych działáń.

295. *Zagádn:* Znaléźć iakiégo célu odlégłość nie mierząc iéy *bezśrzednie* (immediate,) czyli nie udaiąc się wprost, aż do samégo célu.

Sposób. 1. W którym samych się tylko żérdzi lub kołów używá.

1. Wymiérzmy podstawę iaką, któráby się z jednéy strony kończyła na punkcie, od którégo odległość célu chcémy wiedziéć. Ta podstawa (dlá większéy w praktyce dokładności) powinná bydź tym dłuższá, im odległość célu, okiém miarkowaná, zdaie się bydź znacznieyszá. Dlá téyże w praktyce dokładności, trzeba ieszcze takié położénié

wy-

wybrać téy podstawie, aby prostopadłá, którąby do niéy od célu spuścić można, iak naybliżéy iéy śrzodka przypadła; ponieważ ze wszystkich inszych téyże długości podstáw, podstawa z takiém położeniém iest náywygodnieyszá.

2. Wytkniymy kołami ustawionémi od obudwóch podstawy końców, dwie liniie, ku célowi, którégo szukámy, prowadzącé.

3. Zmiérzmy od iednégo końca podstawy, dwie iakiékolwiek długości, iednę na podstawie, a drugą na linii kołami, wyznaczonéy; zmierzmy nad to, i odległość końców, tych dwóch długości iuż wymierzonych. Zróbmy to samo i z drugiégo końca podstawy.

Maiąc té na ziémi wymiary, możémy na papiérze odrysowac Tróykąt podobny tému, który má za podstawę liniią na ziémi wymierzoną, a za wiérzchołek; punkt ten, którégo odległości szukámy.

Jakoż wyraziwszy na papiérze podstawę przez liniią iakąkolwiek, możná będzie przy obudwóch końcach téy linii odrysować dwa Tróykąty, których boki takby się miały do siebie, iak się maią długości na ziémi wymierzoné (pod liczbą 3:) a zatém i liniie które się ciągnęły od końców podstawy na ziémi,

dn

do punktu, którégo odległości szukámy, będą tak do téy podstawy nachylone, iak i liniie dwie na papiérze, od końców linii wyrażaiącéy podstawę prowadzoné, nachylaią się do téyże podstawy.

296. *Przestroga.* Tén sposób wielkiéy bardzo wyciągá báczności, tak w działaniach na ziemi, iako i w przenoszéniu ich na papiér. W tym razie tylko możnágo użyć, gdy i odległości nie są znaczne, i wielká dokładność nie potrzebná: gdy na przykład wyobrażénié tylko chcémy sobie uczynić nie znaioméy odległości iakiégo célu; wyznaczénié według tego sposobu położéniá punktu iakiégo nie dostępnégo, od tego zawisło, aby doyśdź nachyléniá iednéy linii wiadoméy, toiest podstawy, do dwóch inszych prowadzonych od obudwóch końców téyże podstawy, ku punktowi, którégo położéniá szukámy: ponieważ gatunek Tróykątá, témi trzéma liniiami zawartégo, a zatém i stósunek iego boków iuż wyznaczony będzie przez té nachyléniá, *Stolik Geometryczny* (Tabula Pretoriana) i *Kątomiérz* (Graphometrum, albo Instrumentum Goniometricum) są to dwa narzędziá szczególniéy używané do wyznaczéniá bezśrzednie takowych nachyléń.

Sposób 2. Przez stolik Geometryczny.

297. Nie bawiąc się nad opisaniém tego narzędziá, i sztuk do niego należących (bo samo rzucenié oka, dopiéroż używanié, więcéy w téy mierze nauczy, niż opis choćby téż náyobszérnieyszy), przestrzédz tylko należy, że lepiéy iest mieć przy stoliku, gdy kogo stać na to, perspektywy opatrzoné nitkami, w kąt prosty przecinaiącémi się, niżeli prosté *Célowniki* (dioptrae) i że tenże stolik ustawić należy *poziémnie* (horisontaliter) iak będzie można nayrówniéy: do czego *prawidła* (Alidae) *albo* Regulae (a) z ruchomemi perspektywami, daleko są lepszé, niżeli té, przy których perspektywy lub Celowniki są nie ruchomé. (b)

Aby wyznaczyć przez stolik odległość tę, w któréy od iakiego punktu nie dostępnégo zostaiémy; powinná do tego wymierzoná bydź podstawa na ziémi; z ostrożnościami wyżey wzmiankowanemi, co do iéy położeniá i wielkości: trzeba

---

(a) Prawidło, iedno iest to, co i liniiáł; że zaś przy stolikach Geometrycznych, łączy się razém i spáiá z célownikami lub perspektywami, dlá tego się odmiénnégo nazwiska użyło.

(b) Célowniki im są wyższé, tym lepszé, bo bez nachyleniá, lub podniesiéniá stolika, można przez nie widzieć cél iaki na dole, lub w górze wystawiony.

trzeba potém postawić stolik na końcu iednym téy podstawy, i wyrazić tam iéy długość, i położénié, a to przez liniią kierowaną, przez prawidło wzdłuż téyże podstawy ustawioné. Nachylénié podstawy do linii poprowadzonéy od iéy końca ku punktowi niedostępnému, wyrazimy na stoliku, przez liniią od końca podstawy wiedzioną przy prawidle, ku témuż punktowi zkierowanym. To zrobiwszy, przeniesiémy stolik na drugi koniec podstawy, na ziémi wymierzonéy, i podobnie sobie, iak przy piérwszym końcu podstawy postąpimy, ciągnąc znowu przy prawidle liniią od końca drugiégo podstawy na stoliku wyrażonéy ku punktowi, którégo odległości szukámy. Tróykąt wykreslony tym sposobém na stoliku, podobny będzie Tróykątowi na ziémi zamkniętému między podstawą wymierzoną, i dwóma bokami, któréby od iéy końców prowadzoné schodziły się w punkcie zostaiącym w odległości niedostępnéy; a zatém wielkości liniy na stoliku wykréslonych, i podług podziáłki wymierzonych, dadzą nám poznać i wielkości liniy odpowiadaiących na ziémi. I tak niechby na przykład długość podstawy na ziémi, była: 200 sążni, którą wyrážá na stoliku liniiá zamykaiącá w sobie 200 równych części wziętych z jakiéykolwiek podziáłki. Jeżeli drugá liniiá na tymże stoliku poprowadzoná od końca piér-

wszéy wyrażaiącéy podstawę, má w sobie podług téy saméy podziáłki, na przykład, 180 części: to będzie dowodém, że i liniiá odpowiadaiącá iéy na ziémi, zawiérá 180 sążni.

298. Używanié stolika nie rozciągá się, tylko do długości pomiernych. Náywiększá taká długość, do któréy ieszcze stolika użyćby można, nie powinná przechodzić 300, a náywięcéy 400, sążni. Szczupłość narzędziá tego, a zatém i linii przez które musimy na niém wyrážać liniie uwážané na ziémi, czyni uchybiéniá tym znacznieysze, im większé są té ostatnié długości. Możémy iednak używać stolika, gdy idzie tylko o wyrażénié, na papiérze gruntu iakiégo nie bardzo rozległégo i prawie forémnégo: albo gdy tylko wewnętrzné mieysca gruntu, chociaż obszérnégo wyznaczyć potrzeba, którégo położénié punktów znamienitszych, iuż wyznaczoné iest sposobém dokładnieyszym; który zaráz wyłożę.

299. *Sposób 3. przez Kątomiérz* (c).

Wy-

(c) Nauczyciele nié maiąc Kątomiérza, ukážą Uczniom przenośnik który małością tylko różni się od Kątomiérza, i tém, że nié má przydanych sobie prawideł z Célownikami.

Wystawiénié przed oczy tego narzędziá, a potym używanie, dá go náylepiéy poznac. Tę tylko, co i względém stolika uwágę przydadź należy, że kątomiérze z ruchomémi prawidłami, na płaszczyznie pionowey ustawioné, i perspektywami opatrzoné, lepszé są od tych, któré maią prawidła nie ruchomé, zwłaszcza że wielé na tém zawisło, aby kątomiérz był zawsze po ziémnie ustawiony: a długié i trudné iest działanié, chciec przywiéśdź do iedney płaszczyzny kąty na różnych płaszczyznach uważané.

Kątomiérz na to służy, aby przezeń stopniami wyznaczyć kąty, któré tylko liniiami na stoliku oznaczoné były. Ponieważ zaś narzędzié to bywá małé, tak dlá większéy wygody, iak i tanności; przeto nie można oznaczyć na iego brzegu podziáłów mnieyszych od stopnia: przydaią mu zwyczaynie na to mieyscé podziál inszy, któryśmy wyżéy nazwali *podziálém Nonniusza*, aby tym sposobém i minut dochodzić możná, przynáymniéy do 3, 4, lub 5, według wielkości narzędziá: co dosyć iest w zwyczaynych na ziémi działaniach.

Niechby łuk koła, wzięty na brzegu prawidła ruchomégo (który łuk powinién iak náybardziéy przystáwać do brzegu Kątomiérza) i zawiéraiący w sobie na

przy-

przykład 11. ſtopniów, podzielony był
na 12 części równych; każdy takowy
podział tego łuku zawierać będzie ſto-
pień 1, mniey $\frac{1}{12}$, stopnia, toiest mniey
5, minutami; a zatém, gdy dwa po-
działy, ieden prawidła, a drugi ſtopnia
zeydą się z sobą; odległości pierwszych,
drugich, trzecich i t. d. podziałów, wy-
rażać będą: 5, 10, 15, i t. d. minut. Gdy
punkt naznaczony ♎ w podziele prawidła,
toiest, punkt odpowiadaiący *Osi* (Axis)
prawidła, albo perspektywy, schodzi się
z podziałem brzegu Kątomierza; liczba
ſtopniów na tym brzegu wyrażona, zupeł-
nie oznacza w ſtopniach wielkość kąta,
który czynią dwa prawidła. Ale gdy
ten punkt nie ſchodzi się z podziałem brze-
gu, kąt którego szukamy, różnić się bę-
dzie 5. 10, 15, i t. d. minutami co do
wielkości swoiey, od liczby ſtopniów
wyrażoney przy podziele nayblizszym,
podług tego, iaki będzie podział prawidła
czy pierwszy, czy drugi, czy trzeci i t. d.
który się zeydzie z podziałem brzegu.

Aby przez Kątomiérz wyznaczyć odległość punktu niedoſtępnégo.

Trzeba naprzód, aby była wymierzo-
na podſtawa, położywszy potém Kąto-
miérz, na końcu iednym podſtawy, tak
aby prawidło nieruchomé przypadło na
tęż podſtawę, celuię drugiém prawidłem
ru-

ruchomym, do punktu, którégo położé-nié chcę wiedzieć. Toż czynię, i na drugim końcu podstawy; a tym sposobem będę miał dwa kąty wiadomé przy pod-stawie.

Pociągnę daléy na papiérze, iakąkol-wiek linią, któraby podstawę wyrażała, i zrobię przy niéy dwa kąty z obustron równé kątóm uważánym na ziémi. Punkt tén w którym dwa tych kątów ramiona przecinać się będą, pokáże na papiérze położénié punktu, którégo szukám, i iego odległość od iednégo z końców linii wy-rażaiącéy podstawę tak się mieć będzie do téyże linii, iak się má punktu niedostę-pnégo na ziemi odległość, od końca pod-stawy tamtemu odpowiadaiącégo, do sa-méy podstawy. Pierwszy stósunek z po-działki wyznaczony będzie, a zatém wy-náydzie się odległość żądaná przez pro-porcyą: którey trzy piérwszé wyrazy będą wiadomé, toiest, iak się má liniiá wyrażaiąca podstawę na papiérze, do pod-stawy na ziemi; tak się ma liniia na papié-rze odpowiadaiącá odległości, któréy szukámy, do téyże odległości.

Gdyby dwa takié punkta były niedostę-pné, których odległości nie wiémy; mo-żnaby każdégo z nich w szczególności wyznaczyć położénié względém linii wymierzoney, i wziętéy za podstawę: tak się albowiém mieć będzie liniiá na papié-

rze

rze wyrážaiącá podſtawę do linii wyrážaiącéy także na papierze położénia punktów dwóch nie doſtępnych, (który to ſtósunek wiadomy iest z podziałki); iak się má podstawa na ziemi wymierzona, do odległości na ziémi dwóch punktów niedoſtępnych.

Jakážkolwiek zgoła byłaby liczba punktów na ziemi którychbyśmy położénié wyznaczyć chcieli, nie mierząc wszyſtkich tych odległości, którémi są té punkta oddzielone; możná podobnym iak wyżéy sposobém i odległość tę wyznaczyć, i położenie każdégo z osobna punktu względém podstawy, z którey dwóch końców wszystkié té punkta widziané bydź mogą: i według tego wyznaczyć potém na papiérze tak położeniá, iako i odległości odpowiadaiące tamtym punktóm.

Możná więc będzie tym sposobém odrysować mappę i obszernieyszéy sztuki ziémi, któréy punkta do tego potrzebné widzialné są z dwóch iakich inszych punktów.

Gdyby zaś nie wszyſtkié té punkta, których położéniá wiedzieć chcémy, były nie doſtępné, możná w tym razie przenieść się do doſtępnych, i obrać iedén z nich, lub dwa za nowé *punkta ſtanowiſka* (puncta ſtationis) toiest takié, z których położénié inszych punktów, mógłoby bydź wy-

wyznaczoné; i znowu wyznaczać położenia tych punktów, które albo z iednégo tylko z pierwszych punktów stanowiska, albo z żadnego nie były widzialne; biorąc zawsze za podstawę odległość dwóch punktów, których położenie iuż wyznaczoné iest przez rysunek. Można podobnym sposobém działanie to rozciągnąć, i do odrysowania mieysc obszérnieyszych.

Lubo przepisy tu podané, są z siebie dokładné i iasné; atoli w wykonaniu ich, wielkiéy baczności przykładac należy: bo inaczéy, tym większé będą w rozmiarach błędy, i uchybienia, im odległości do mierzénia podané, są znacznieyszé, i działania w nich bardziéy zawisłé iedne od drugich. Nie będziémy się tu bawić nad podawaniem drobnieyszych w téy mierze uwag, i służących tym tylko uczniom szczególniéy, których powołanié wezwie w czasie, do pilnowania z Urzędu takowych działań, Znaydą ci bardzo dobre do tego się ściągaiące nauki, w różnych Xiążkach, między inszémi w trzeciéy Xiędze pod tytułem *Institutiones Mathematicae* przez X. Metzburga. w Wiedniu 1777, wydanéy.

300. Tego się szczególniéy w podobnych rozmiarach strzédz potrzeba, aby, tak té kąty, które uważamy przy punktach stanowiska nie były bardzo ostré, iako i té,

któ-

które sobie wystawić w myśli można przy punktach, których położenia szukamy, i które zawarte byłyby między dwiema liniiami prowadzącemi od punktów dwóch ſtacyy do tamtych punktów. Dlatego podſtawa powinna bydź tym większa; im większa odległość, którey ſzukamy, i położenie punktów takie, aby prostopadłe od nich spuszczone, ile możności, przypadały na podſtawę nie przedłużoną, albo przynaymniey mało co przeciągnioną. Małe uchybienie w kącie, przy podſtawie, pociąga za sobą tym większe uchybienie w bokach; im większe są nie tylko te same boki, ale i ich kwadraty; a zatem, gdy kąty przy podſtawie są bardzo oſtre, albo też, gdy ich summa nie wiele się różni od ſummy dwóch kątów prostych, w takim razie trzeba odmienić iedno, lub obadwa ſtanowiska. A ieżeliby między punktami, których położenie i odległość już ieſt wyznaczona, nie znaydowały się dwa insze takie, aby linia łącząca ie zdatna była do wyznaczenia inszych punktów pozoſtałych, trzeba w takim razie brać punkt iakikolwiek mogący wygodnie ſłużyć za ſtanowiſko, z oſtrożnościami wyżey spomnionemi; choćby nam z siebie nie był potrzebny do tego celu, któryśmy sobie szczególniey założyli.

Gdy w działania wchodzić muszą takie wymiary, z których iedne zawiſły od drugich; należy przynaymniey bydź za-

pe-

pewnionym, że w tén zwiazek działáń nie wplątały się błędy, z których rozmnożénia urosłoby znacznieysze iakié uchybiénié.

Przeto możná w rzeczy samé wymierzyć odległość iednę z tych, których doszliśmy z przeniesiéniá figury na papier, i uważać, czyli się nie różni od tey, która wyznaczoná była przez proporcyą którey dwoma wyrazami były dwa boki na papiérze, trzecim podſtawa na ziémi, a czwártym odległość szukaná; albo też wynaleziona odległość dwóch punktów, wziąźć za podſtawę i szukać z niéy położéniá końca iednego z dwóch, piérwszey podſtawy, tak właśnie, iak gdyby ta była nám ieszcze niewiadomá; a gdy się pokáże, że z tego powtórnégo działaniá wypadnie to położénié punktu, co z piérwszégo, albo mało co różnić się będzie, możná to mieć za dowód dość pewny, że w ciągu działáń nie było uchybieniá, przynaymniey znacznieyszego: ponieważ z dwoiakiégo takiégo działania, iednakowé położenié wypaśdźby inaczéy nié mogło, chyba żeby iedén błąd poprawił, a bardziey nagrodził drugi: co się rzadko tráfiá.

Jakáżkolwiek iednak ostrożność będzie i dokładność w działaniach na gruncie, czyli to w wymierzeniu podstawy, czyli w braniu kątów; przenoszenie atoli

li na papiér tych działáń, będzie podlegać wielkim niepewnościóm.

Trudność ta ostatniá stąd szczególniéy wyniká; że pewną liczbę stopniów brać przychodzi na przenośniku, albo cyrklu proporcyonalnym. Na tych zaś dwóch narzędziach, ciężko iest wyznaczyć liczbę stopniów, a niepodobná wyznaczyć liczbę minut, które się pospolicie w kącie danym znáyduią. Nuż tedy uchybiénié będzie w połowie tylko stopnia, albo 30. minutach; tén nie wielki na oko błąd, pociągnie za sobą inszy większy w liniiach, których długość różnić się stąd będzie od práwdziwéy, 3ostą, 2ostą, a czasém i totą częścią tychże samych liniy; a tén błąd tym większé uchybiénié w długościach, czyli wielkościach liniy sprawi; im mnieyszá względém nich była ta liniiá, którą wzięliśmy za promień. Źrzódło to omyłek mniéy wpływać będzie w takowé uchybiéniá, gdy iuż nám skądinąd wiadomé są długości boków należących do Figur, które rysować mámy: a té długości są pospolicie zamiarém szczególnieyszym działáń mierniczych. Gdyby na przykład: trafiło się, żeśmy w pół linii lub w cały linii uchybili, biorąc na podziáłce iakąkolwiek długość; omyłka ta, która stąd wyniknie, względém położéniá na papiérze liniy, figurę iaką zamykaiących, będzie tym mnieyszá; im dłuższe były liniie, któréśmy przenosili. Szu-

Szukano więc sposobu, aby wszystkié działaniá na gruncie, tak można było przenieść na papiér, żeby té wyrážały się w takich Tróykątach, których boki byłyby nám wiadomé, toiest, żeby można odrysować na papiérze z pomocą samé y podziałki, figury podobné tym, któréśmy na gruncie uważali. Maiąc tedy daną liczbę ilości w liniiach lub w kątach, dostateczną do wyznaczéniá całégo Tróykąta, szukano sposobów, i znaleziono ié, iakby stąd doyśdź ilości pozostałych w liniiach i kątach ieszcze nie wyznaczonych.

Część Ziémiomiérstwa, którá na to przepisy daie, nazywá się *Trygonometryą*, albo *Tróykątmiérstwém*: a to dlá tego, że szczególniéy rzecz tam iest o Tróykątach, iako tych, od których wyrachowaniá wszystkich inszych wielokątów wyrachowanié zawisło. Jest to część náyznakomitszá Matematyki, nazwanéy (*Mathesis pura*): przystósować ią bardzo często można do Matematyki, którą nazywać można *Miészaną*, idąc za łacińskiém nazwiskiém (*Mathesis mixta*:) iako to do Mechaniki, albo nauki o machinach, czyli silniach: do Optyki, albo nauki o widzéniu, a náywięcey do Astronomii, czyli nauki Gwiázdarskiéy: i dlá tego ta część szczególnieyszéy uwági i zastanowiéniá się Uczniów wyciągá.

Przy-

Przygotowanie do Rozdziału następuiącego o Logarytmach.

Ponieważ o Logarytmach dokładniey mówić się potem będzie; tu tyle tylko o nich powiemy, ile potrzeba umieć, aby ie przystosować można do rozwiązania reguły trzech, i wyciągnienia pierwiastku kwadratowego.

301. Logarytmy, są to liczby odpowiadaiące liczbom całkowitym, i następnym, 1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w ten sposób, że te pierwsze liczby, czyli Logarytmy, iedne do drugich dodane, odpowiadaią tym ostatnim, gdy są iedne przez drugie rozmnożone.

J tak znáyduiemy w táblicach logarytmowych przy liczbach - - - - 2, i 3.

Logarytmy: 0, 301 030 0.
0, 477 121 3.

Jch summa 0, 778 151 3 iest logarytmem liczby 6, którą się robi z rozmnożenia 2, przez 3.

W zwy-

W zwyczaynych táblicach logarytmowych, logarytmy liczb:

10,	- -	1
	są	
100	- -	2
1000	- -	3
10000	- -	4.
i t. d.		i t. d.

Logarytmy liczb mnieyszych od 10, ale większych od 1, są ułomki dziesiątné nie maiącé żádnéy liczby cáłkowitéy.

J tak Logarytmy liczb:

2, -		0, 301 030 0.
	są	
3,		0, 477 121 3.
4, -		0, 602 060 0.
5, -		0, 698 970 0.
i t. d:		i t. d.

302. Ponieważ zaś rozmnożénié iakiéy liczby przez 1, żádnéy odmiany w niéy nie ſprawiá; przeto i dodanié logarytmu iedności, do logarytmu téy liczby, odmiénić tego logarytmu nie powinno; Logarytm więc iedności ieſt zero albo 0.

Logarytmy liczb między 10, i 100, są iedności z przydanémi ułomkami dziesiątnémi.

Logarytmy liczb między 100, i 1000, między 1000, i 10000, i t. d. są liczby cáłko-

kowité piérwszych, 2, drugich, 3, i t. d. z przydanémi ułomkami dziesiątnémi

Znak piérwszy logarytmu liczby cálkowitéy ieſt częścią nayznakomitszą tegoż logarytmu, ponieważ daie poznać z jak wielu znaków ſkłádá się liczba całkowitá, któréy ieſt logarytmém. Tak na przykład, znak logarytmu piérwszy: 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. daie poznać, iż liczba, któréy odpowiádá, zawiérá się między 1, a 10, albo między 10, a 100, albo między 100, a 1000, albo między 1000, a 10000, albo między 10000, a 100000. i t. d. to iest má w sobie ieden, dwa, trzy, cztéry, pięć, i t. d. znaków liczb całkowitych. Dlá tego też piérwszy znak Logarytmu nazywá się iego *Cechą* (Charaćteriſtica.)

303. Gdy dwa logarytmy, maią iednakowé ułomki dziesiątné, (d) a cécha ich tylko ieſt odmiénná; w takim razie liczby im odpowiadaiącé, są 10, 100, 1000, i t. d. razy większé iedna od drugiéy, podług tego, iak cécha ich logarytmu większa będzie iedna od drugiéy, dwiéma, trzéma i t. d. iednościami, J tak logarytm liczby 20, 200, 2000, i t. d. będzie, 1, 301 030 0. 2, 301 030 0. 3, 301 030 0. i t. d. toiest, będzie tén sám co i Logarytm liczby

Té ułomki w Logarytmie, nazywaią Autorowie piszący po Łacinie: *Mantyſsa.*

liczby 2, przydawszy mu Log: liczb 10, 100, 1000 i t. d.

Trzeba przez kilka przykładów wprawić Ucznie w to pierwsze działanie; biorąc takie liczby, któreby nie większe były, od naywiększey liczby tablic logarytmowych.

304. *Przykład* 1. Rozmnożyć 28 przez 32.

Log: liczby	28	- ieſt	1, 447 158 0,
Log:	32	-	1, 505 150 0,
Summa Log.	-	-	2, 952 308 0.

J ta Summa powinna bydź logarytmem liczby rozmnożoney z 28 przez 32. Jakoż w tablicach logarytmowych przy logarytmie, 295 230 80, znaydziemy liczbę 896; która to liczba wypada w samey rzeczy z rozmnożenia 28 przez 32.

Przykład 2. Rozmnożyć trzy liczby: 16, 24, 26,

Log:	16,	-	1, 204 120 0.
Log:	24,	-	1, 380 211 2.
Log:	26.	-	1, 414 973 3.
Summa Log:		-	3, 999 304 5.

S J toiest

J toiest logarytm liczby 998 4, która wypádá z rozmnożénia trzech liczb: 16, 24, 26.

305. Ponieważ kwadrat iakiéy liczby, ieſt ta sama liczba przez siebie rozmnożoná; więc logarytm tego kwadratu, będzie rówuy logarytmowi liczby z któréy kwadrat powſtał, dwa razy wziętému.

Przykład 1. Log: 2, - 0. 301 030 0.

Ténże dwa razy wzięty 0, 602 060 0, będzie logarytmem kwadratu z 2, to ieſt 4.

Przykład. 2, Log. 56	-	1. 748 188 0.
Dwa razy wzięty:	- -	3, 496 376 0.
będzie Logarytmém kwadratu z 56, toiest:	- -	3, 136.

306. W dzieléniu, liczba podzielná równá się liczbie dzielącéy, przez wieloráz rozmnożonéy; a zatém logarytm liczby podzielney, równá się logarytmowi liczby dzielącéy dodanému do logarytmu wielorazu; a stąd logarytm tego wielorazu, będzie różnicą między logarytmami liczby podzieloney i dzielącey.

Przykład. 1. Podzielić 6, przez 2,

Log: 6.	-	0, 778 151 3.
Log: 2.	-	0, 301 030 0.
Różnica	-	0, 477 121 3. iest

logarytmém wielorazu, toieſt 3. *Przy-*

Przykład 2. Podzielić 1632 przez 34.

Log: 1632	- -	3,212 720 2
Log: 34	- -	1,531 478 9
Różnica	- -	1,681 241 3.

Różnica - - 1,681 241 3. iest logarytmem wielorazu toiest. 48.

307. W proporcyi: śrzednie liczby, iedna przez drugą rozmnożone, równe są skraynym podobnie rozmnożonym, iako się to w Arytmetyce i w Rozdziele o proporcyach wywiodło. Przeto iednę z skraynych liczbę znáyduiemy, dzieląc śrzednie liczby w tén, iak wyżéy, sposób rozmnożone, przez drugą liczbę skrayną: a zatém i logarytm liczby iednéy skrayney wynáydziémy, odiąwszy od summy logarytmów dwóch liczb śrzednich, logarytm drugiéy liczby skrayney.

Przykład 1. 35 Robotników, zrobiło 45, sążni pewnéy roboty, ileż w tym samym czasie zrobi 42, robotników z równą usilnością prácuiących?

Log: 42	- -	1.623 249 3.
Log: 45	- -	1.653 212 5.
Summa	- -	3.276 461 8.
Log: 35	- -	1.544 068 0.

Różnica - 1.732 393 8. iest logarytmém żądanym, liczby 54.

308. Zamiást odeymowaniá, któréby nalcżało czynić w logarytmach, używá się wygodnie dodáwaniá w tén sposób: Logarytm liczby dzielacey, a bardziéy iego cécha, odeymuie się od liczby całkowitéy 10, i reszta dodaie się do logarytmu liczby podzielnéy, a od summy, znowu się 10 odcinà.

Defin: Różnica logarytmu liczby iakiéy od 10. nazywá się *dopełnieniém* (complementum) tego logarytmu.

Przykład. Podzielić 6. przez 2.

Log: 6. - - 0.778 151 3.
Log: 2. 030 103 00. Dopełnienié tego log: 9.698 970 0

Summa - 10,477 121 3
Log: wielorazu - 0. 477 121 3.
iest Log: 3.

Podzielić 1632 przez 34.
Log: 1632 3.212 720 2.

Log: 34, 1.531 478 9. Dopełn: Log: 34, 8.468 521 1.

Summa - - 11.681 241 3.
Log: wielora: 1.681 241 3.
iest Log: 48.

Tén

Tén sposób postępowaniá osobliwiéy iest wygodny w Regule Trzech, gdzie odeymowanié następuiącé, po dodawaniu, mogłoby w długich zwłászcza rachunkach, omyłki iakiéy dadź okazyą. Możná zaś i nie wielką nawet w rachowaniu maiąc wprawę, na pamięć czynić to odeymowanié, któré potrzebné iest do otrzymaniá dopełniéniá logarytmu, któré się potém dodaie na mieyscé logarytmu odeymować się maiącégo.

Przykład 35 Robotników, zrobiło 45 sążni, iléż zrobi 42 rob:?

Log:	42	1.623 249 3.
Log:	45.	1.653 212 5.
Dopełniénié Logar:	35	8.455 932 0.
Summa któréy cécha zmnieyszoná liczbą 10.		1.732 393 8.

Przykład 2. Bok iedén prostokata má 1344, a drugi 1445 łokci. Trzeba go zamiénić na inszy prostokąt iému równy, którego bok iedén má zawiérać 1440. łokci?

Log:	1344	-	3.128 399 3
Log:	1445	-	3.162 863 0
	Summa	-	6.291 262.3.
Log:	1440	-	3.158 362 5.
Różnica		-	3,132 899 8. iest

Logary-

Logarytmém liczby, któréy szukaliśmy toiest 1358.

309. Ponieważ Logarytm Kwadratu, dwa razy iest większy, niż Logarytm piérwiastku; przeto Logarytm pierwiástku; iest połową logarytmu kwadratu. Aby tedy wyciągnąć z liczby piérwiástek kwadratowy; trzeba wziąść połowę logarytmu téy liczby.

Przykład 1. Wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z 4.

Log: 4. - 0.602 060 0.

Połowa - - 0.301 030 0. ieſt logarytmém piérwiáſtku, toieſt 2.

Przykład 2. Wyciągnąć piérwiáſtek kwadratowy z 7569.

Log: 7569. - 3.879 038 5.

Połowa - 1.939 519 2. ieſt logarytmém piérwiáſtku, toieſt 87.

Przykład. 3. Boki proſtokąta są: 378, i 672, iakiż będzie bok kwadratu iému równego w powiérzchni?

Log:	378	-	2. 577 491 8.
Log:	672	-	2. 827 369 3.
Summa		-	5. 404 861 1.

Poło-

Połowa - 2. 702 430 5. iest logarytmém liczby szukanéy toiest 504.

310. *Co się tycze logarytmów ułomków dziesiętnich.*

Niech będzie liczba n p. 1764, którey logarytm: 3. 246 498 6. Podzieliwszy tę liczbę przez 10, logarytm wielorazu powinién mieć iedną iednością mniey w césze swoiéy (303.) Logarytm tedy liczby 176, 4, będzie - 2. 246 498 6. Podobnie log: 17, 64, będzie 1. 246 498 6. Log: 1, 764 - 0, 246 498 6.

Dzieląc 1764, przez 1000, logarytm wielorazu, toieſt liczby 1, 764, má céchę mnieyszą 3 iednościami, niżeli miáł logarytm liczby 1764, nie podzieloney. Gdyby tedy przyszło, 1764 dzielić przez 1 000 0, 1 000 00, 1 000 000, i t. d. Logarytmy wielorazów, toiest ułomków dziesiątnych: 0, 1764. 0, 0 1764, 0,001 764 i t. d. powinnyby mieć 4, 5, 6, i t. d. iednościami mnieyszą céchę, niżeli miáł logarytm liczby 1764, nie podzielonéy. Że zaś cécha logarytmu liczby 1764, ieſt: 3, a céchy logarytmów liczb: 1 000 0, 1 000 00, 1 000 000, i t. d. są: 4, 5, 6, i t. d. toiest liczby większé od 3, od których ié odeymować przypádá; więc dlá większéy w odeymowaniu wygody uważá się, iakoby cécha 3, powiększoná była 10 iednościami, i dopiéro od tak powiększonéy odey-

odeymuią się céchy liczb dzielących: 1 000 0, 100 000, 1 000 000. i t. d. toiest céchy: 4, 5, 6, i t. d. pamiętaiąc zawsze na to przydanié i zmnieyszaiąc znowu resztę, toi st, logarytm wielorazu tąż liczbą: 10; będzie więc log $\frac{1\ 764}{1\ 000}$, albo 0, 1 764 = 13, 246 498 6—4 (e) = 9, 246 498 6, toiest dlá dodanych 10, do céchy 3, będzie w samé y rzeczy = 9, 256 498 6 — 10: Tak téż Log: 0,017 64; będzie=8,246 498. 6 — 10. log. 0. 001. 764. będzie = 7, 246 498 6 — 10. i t. d.

Przykład 1. Rozmnożyć 24 przez 0, 5.

Log: 24 = 1,380 211 2.

Log: 0,5 = 9,698 970 0. — 10.

Summa = 1,079 181 2. = Log: 12, toiest liczby wypádaiącéy z rozmnożéniá 24 przez 0,5.

Przykład 2. Rozmnożyć 24 przez 0, 05.

Log: 24 = 1,380 211 2.

Log: 0,05 = 8,698 970 0. — 10.

Summa = 0,079 181 2. iest logarytmém liczby rozmnożonéy.

Tén

(e) Znak — kładzie się przed tą ilością n p. przed tą liczbą, ktorá má bydź od drugiéy odiętą.

Tén logarytm nie znáyduie się w tá-blicach logarytmowych z céchą, o, ale się znáyduie z céchą 1, i odpowiádá mu liczba: 12; a zatém liczba, któréy szukaliśmy, będzie 10 razy, mnieyszá toieſt: 1, 2.

Przykład: 3. Podzielić 32 przez 0, 5.

Log: 32 = 1,505 150 0.

Log: 0,5 = 9,698 970 0. — 10.

Reszta. 1.806 180 0 ieſt logarytmém wielorazu, toieſt liczby 64.

Odeymuiąc 9.698 970 0, od 1,505 150 0, odéymowalibyśmy 10 razy więcéy, niż potrzeba; więcby to 10 do reszty przydadź należało. Na iedno zaś wyydzie, gdy té 10, którémi ieſt powiększona liczba maiąca się odeymować, przydámy też i do liczby, od któréy ią odeymować przypádá, toieſt, gdy odeymuiémy 9,698 970 0 od 11,505 150 0.

Przykład 4. Podzielić 144, przez 0, 06.

Log: 144 = 2,158 362 5.

Log: 0,06, = 8,778 151 3. — 10.

Różnica - - 3,380 211 2. ieſt logarytmém wielorazu, toieſt liczby: 2400.

Co

Co do ułomków zwyczaynych.

311. Ponieważ ułomek uważać można, iako oznáczaiacy dzielenié licznika iego przez mianownika; będzie zatem logarytm ułomka równy różnicy między logarytmem licznika iego i mianownika.

Niech będzie na przykład ułomek nie właściwy $\frac{7}{5}$.

Log: 7. - 0,845 098 0.

Log: 5 - 0,698 970 0.

Różnica - 0,146 128 0 = Log: $\frac{7}{5}$.

Można się o tém przekonać używszy ułomka dziesiątnégo zamiaſt ułomka $\frac{7}{5}$, będzie albowiém $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$.

Log: 14 - 1.146 128 0.

A zatém Log: 1,4 - 0.146 128 0.

312. Gdyby ułomek był właściwy, to ieſt gdyby licznik iego był mnieyszy od mianownika; w takim razie logarytm licznika byłby też mnieyszy od logarytmu mianownika. Aby więc można odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika;

ka; pożyczámy 10. témo logarytmowi iak wyżey (310) w podobnym przypádku.

Przykład 1. Niech będzie ułomek: $\frac{2}{5}$.

Log: 2=0,301 030 0.

Log: 5=0,698 970 0.

Log: $\frac{2}{5}$=9,602 060 0. — 10.

Przykład 2. Trzeba znaléźć Log: $\frac{7}{15}$

Log: 7 = 0,845 098 0.

Log: 15. = 1,176 091 3.

Log: $\frac{7}{15}$. = 9,669 006 7. — 10.

Przykład. Trzeba znaléźć log: $\frac{1}{25}$

Log: 1. = 0,000 000 0.

Log: 25=1,397 940 0.

Log: $\frac{1}{25}$=8,602 060 0. — 10.

Zdaie się, iżby przystało używać odmiénnégo iakiégo znaku céchy, gdy ta należy do logarytmu odpowiadaiącégo ułomkowi, aby ią zaráz na weyzrzénié rozeznać możná od céchy logarytmu, który liczbie cáłkowitéy odpowiádá.

313. Kiedy logarytm iaki, nie znáyduie się w Táblicach, można wtedy liczbę, któréy odpowiada, wyznaczyć; albo z zupełną dokładnością albo z małem uchybiéniém.

Przykład: 1. Jakiż ieft wieloráz 5, przez 4 podzielonych?

Log: 5	- -	0.698 070 0.
Log: 4	- -	0.602 060 0.
Różnica	- -	0.096 910 0.

Logarytm ostatni oznáczaiący różnicę dwóch piérwszych logarytmów, nie znáyduie się w Táblicach ani z céchą 0, ani z céchą 1; ale się znáyduie z céchą 2; liczba onému odpowiadaiącá iest: 125; ale że tén logarytm má cechę 2; więc nasz będzie odpowiadál liczbie 100 razy mnieyszéy, toiest: 1,25.

Przykład 2. Trzeba znaleźć kwadrat z 299, maiac tylko Tablice Log: nie daléy rozciągaiace się, iak do 10000, toiest takié, których náywiększy Log: iest: 4 000 000 0.

Log: 299	- -	2.475 671 2.
Ténże podwoiony	-	4.951 342 4.

Drugiégo tego logarytmu w táblicach zwy-

zwyczaynych nie znáyduiémy. Zmnieyszmy więc iednością cechę iego: tén Logarytm zmnieyszony 3.951 342 4, lubo co do wszystkich liczb swoich, nie znáyduie się w táblicach; znáyduiémy go iednak co do piérwszych, i mało co większy iest od Log: 3.951 337 5. a mnieyszy od 3.951 386 1.

Piérwszy z tych logarytmów znáyduiących się zupełnie w Tablicach: iest Log: liczby 8940, a drugi Log: liczby - - - - 8941.

A zatém liczba, któréy szukámy, będzie między 8 940 0 - - - - - - 8 941 0.

Logarytm dany przewyższá logarytm piérwszy Táblicowy liczbą 49; mnieyszy zaś iest od drugiégo logarytmu Táblicowégo liczbą 437. Ta tedy któréy szukámy liczba, powinná daleko więcéy zbliżać się do 8 940 0, niż do 8 941 0.

Widzimy z Táblic, że kilka logarytmów, które następuią po logarytmach liczb 8940, i 8941, maią tę samę, co i té logarytmy różnicę, toiest 486, tak, iak i różnica liczb im odpowiadaiących iest taż sama, toiest 1: a zatém ieżeli różnica między logarytmém danym i logarytmém Táblic iému náybliższym, iest na przykład połową, lub trzecią częścią, lub czwártą, i t. d. różnicy między tymże

że náybliższym logarytmém, i drugim, zaráz po nim następuiącym, to też i różnica między liczbą odpowiadaiącą logarytmowi danému, a liczbą odpowiadaiącą logarytmowi náybliższému, będzie prawie połową trzecią częścią, czwártą i t. d. iedności, która iest różnicą między dwiéma liczbami naturalnémi, po sobie idącémi. Że tedy różnica 49, iest prawie $\frac{1}{10}$ częścią różnicy 486; więc i różnica liczby szukaney dlá dodatku liczbie 8940, będzie dziesiątą częścią iedności, toiest 0, 1; a zatem liczba odpowiadaiąca logarytmowi 3.951 342 4, będzie prawie 8940, 1, liczba zaś odpowiadaiąca Log: 4.951 342 4, będzie, 8 940 1, toiest kwadrat, którégo szukaliśmy.

Ponieważ w tym przykładzie szczególnym zakończénie liczby 299 pokazuie, iż kwadrat iéy má się kończyć na 1, można było bez tak długiégo rozumowaniá doyśdź téyże liczby kwadratowéy: 8 940 1.

314. Czému różnica dwóch logarytmów po sobie następuiących iest tym mnieyszá, im są większé liczby, którym oné odpowiadaią, można to tak wyłożyć.

Różnica logarytmów dwóch liczb: 10, i 9. iest: 4 575 75.

Ró-

Różnica logarytmów dwóch liczb 100, i 90, iest ta sama; (ponieważ $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$;) ale ta rozkłádá się na dziesięć inszych mnieyszych różnic między logarytmami liczb 90, i 91, 91 i 92, 92 i 93 . . . . . 99 i 100.

Różnica między logarytmami liczb 900, i 1000, iest znowu ta sama co i między logarytmami liczb 10 i 9. (ponieważ $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$) ale ta rozkłádá się na 100 mnieyszych daleko różnic między logarytmami liczb 900, i 901, 901, i 902, 902, i 903, 999 i 1000.

Podobnie i różnica logarytmów liczb 9000, i 10000, lubo ta sama iest, co między logarytmami liczb 9 i 10; ale się rozkłada na 1000. inszych różnic mnieyszych, i t. d.

315. Używanie logarytmów iest bardzo przydatne w wyciąganiu pierwiastków z jlości nie spółmiernych.

Przykład 1. Trzeba wyciągnąć przybliżony pierwiastek kwadratowy z 2.

Log: 2. - 0.301 030 0.

Połowa tego Log: - - 0.150 515 0.

Szukáymy téy połowy z céchą 3. Logarytm náybliższy w táblicach będzie:

3.150.

3,150 449 4, który odpowiádá liczbie: 1414. A że ten logarytm iest mnieyszy od 3,150 515 0; więc liczba odpowiadaiąca logarytmowi danemu będzie między 1,414. i 1,415. Kwadraty zaś tych ostatnich liczb są: 1,994 476; i 2,002 305.

Aby piérwiástek bardziéy ieszcze przybliżyć do prawdziwego, weźmy różnicę 656, między logarytmém danym, i náybliższym z tablic: i znowu weźmy drugą różnicę 3070 między dwoma tablic logarytmami, danemu naybliższémi. Ułomek $\frac{656}{3070}$ na dziesiątné części obrócony, będzie miał piérwszé dwa znaki liczebné: 21; a zatém pierwiástek bardziéy przybliżony będzie: 1,414 21. Możnaby i więcey, gdyby kto chciał znaków liczebnych przydadź w tym piérwiástku; kończąc daléy dzielénie, a tem więcéy pierwiástek ten byłby do prawdziwego przybliżony.

Przykład 2. Trzeba znaléźć liczbę przybliżoną do następuiącégo wyrazu: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

Log: 5. - 0.698 970 0; $\frac{1}{2}$ Log: 5. - 0.349 485 0.

Log: 2. - 0.301 030 0; $\frac{1}{2}$ Log: 2 - 0.150 515 0.

Różnica - - - 0.198 970 0.

Osta-

Ostatni logarytm oznaczaiący różnicę, odpowiáda prawie w tablicach z cechą przydaną 3, liczbie 1,581, a zatém $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ równa się prawie 1,581.

ROZDZIAŁ XII.

O Trygonometryi.

316. Wystáwmy sobie Tróykąt w koło wpisany. Boki tego Tróykąta byłyby cienciwami łuków przeciwnych iego kątóm. A że miarą tych kątów są połowy tychże łuków; więc boki tego Tróykąta będą cienciwami łuków dwa razy większych, niżeli są te, których ważność w stopniach ta sama iest, co i kątów im przeciwnych.

Idzie zatém, że gdybyśmy mieli ułożoną z figury dokładney, lub z rachunku Tablicę cienciw do łuków wszystkich koła, zacząwszy na przykład od łuku iedney minuty aż do 180 stopniów (którego to ostatniego łuku cienciwa iest naywiększa) iuż tém samem i stósunek boków Tróykąta znaleźlibyśmy z danych kątów iego: i wzaiémnie (lubo nie tak prosto) doszlibyśmy ważności w stopniach kątów, z danych boków Tróykąta.

317. Aby uniknąć brania połowy, lub wedwóynasób kątów Tróykąta, szukam

zamieść [illegible] inszych liniy, do których boki Tróykąta byłyby proporcyonalne, i takich, które by się właściwie ściągały do kątów tegoż Tróykąta. Kąt we śrzodku koła opisanego na Troykącie, zamykaiący ramionami swemi ten łuk, którego cięciwą iest bok ieden tegoż Tróykąta, kąt mówię taki, dwa razy iest większy od tego, który przy okręgu koła naprzeciw stoi tegoż boku Tróykąta; a zatém gdybyśmy ten kąt we śrzodku przecięli liniią na dwie równé części iedna takowá część byłaby równa tamtému kątowi Tróykąta. Bok tenże Tróykąta byłby prostopadły do linii przecinaiącey kąt na dwie równé części; a ta liniiá przecięłaby go na dwie także równé części. Toż samo przystósować można i do inszych dwóch boków tego Tróykąta. W ten sposób wystawiono sobie boki Tróykąta, względem kątów im przeciwnych.

318. *Defin.* Wziąwszy łuk koła iakikolwiek, ieżeli od iednego końca tego łuku, spuścimy prostopadłą na promień przechodzący przez drugi koniec tegóż łuku; ta prostopadłá ma nazwisko *Sinus* (f) a po Polsku nazwać ią można *Wstawą* tego

(f) Wyraz téu *Sinu* stąd podobno má swóy początek: [illegible] *Cięciwa* nazywá [illegible] a połowa cięciwy, *Semissis* [illegible] *[illegible]*, na skrócenia pisano może dá-

tego łuku, że się wstawiá między końcem iednym łuku, kąt mierzącego, i między promieniém przez drugi koniec tegoż łuku przechodzącym,

Niech będzie AB łuk koła; prostopadła BD, spuszczoną od końca B tego łuku, na promień CA, przechodzący przez drugiego koniec A, nazywać będziemy *wstawą* tego łuku. Tab. XVII. Fig. 2.

319. *Wniosek* 1. Wstawa łuku równá się połowie ciénciwy łuku inszego, dwa razy większego iak na przykład Wstawa BD, łuku BA, równa się połowie ciénciwy BE, łuku dwa razy większego BAE.

320. *Wniosek* 2. Wstawy łuków rosną od 0, aż do 90°, a ponieważ wstawa stopniów 90, równá się promieniowi, i iest naywiększa, nazywa się dlá tego *Wstawą całą* (Sinus totus.)

321. *Wniosek* 3. Wstawy łuków większych od czwártéy części okręgu koła, zmnieyszaią się coraz bardziéy zacząwszy od 90° aż do 180°; tak dalece, że Wstawa

T 2 sto-

wniéy *S. Jns.* Przepisuiący iakié dziéło Matematyczné; nie wiedząc znaczénia wyrazu tego skrócenia, opuścił punkt oddzielaiący té dwa wyrazy, i dawszy słowy *Sins* zakończénié łacinskié, napisał *Sinus*, i stąd potém wzięté podobno było to nazwisko.

ſtopniów 180° równa się 0. Wſtawa zaś każdego łuku większego od 90°, a mnieyszego od 180° ieſt ta sama, która i łuku mnieyszego od 90°, a spełniaiącego łuk pierwszy do 180°. J tak na przykład Wſtawa łuku 100°, taż sama iest co i łuku 80° wſtawa łuku 120° ta sama, co i łuku 60° i t. d. Takowe *spełnienie* łuku do 180° albo do pół okręgu koła, nazywa się po łacinie *Supplementum arcus*

Co sie tycze łuków, większych od półokręgu koła, o tem nie ma potrzeby mówić w tych początkach.

322. *Wniosek* 4. Ponieważ promień na przykład CF, ieſt Wſtawą náywiększą ze wszyſtkich, czyli Wſtawą ſtopniów 90°, Wſtawa zaś od łuku AFb, większégo od czwartey części tego okręgu, ieſt ta sama, co i łuku ab, mnieyszégo od czwartey części tegoż okręgu; (który to łuk oſtatni spełnia pierwſzy do półokręgu), idzie zatém, że do ułożéniá Tablicy na wstawy łuków dosyć wyznaczyć wſtawy tych łuków, które są mnieyszé od 90°.

323. *Wniosek* 5, Wſtawy łuków podobnych, w kołach odmiennych, tak się mają do siebie, iak tychże kół promienie. Jeżeli tedy mámy Tablicę wſtaw podług promienia podzielonégo na pewną liczbę części równych; wynáydziemy przez

regułę

regułę trzech i wystawy podobnych łuków, podług innego promienia.

324. *Wniosek 6.* Ponieważ kąt we śrzodku, na przykład ACB. tyle stopniów w sobie zamyka, co i łuk AB, który go mierzy, i iest mu proporcyonalny; będzie więc wstawa łuku AB, Wstawą także i kąta ACB.

Wstawa tedy kąta, iest prostopadła, spuszczona od punktu iakiego w iednym z ramion iego, do drugiego ramienia, biorąc za promień odległość tego punktu od wierzchołka kąta; Cokolwiek zatem niewiedziało sie o wstawach łuków, wszystko to przystósować można i do wstaw kątów. J tak, Wstawy kątów rosną od 0, aż do wstawy 90°; która się równa promieniowi, zmnieyszaią sie znowu zaczawszy od wstawy 90°, aż do wstawy 180°. (która iest = 0;) i wstawa kąta roztwartego, ta sama iest, co i kąta ostrego, który tamtego spełnia, do 180°.

Wstawy równych kątów, są do siebie, iak liniie wzięte za promienie.

A ieżeli dwie liniie są wstawami dwóch kątów, względem tegoż samego promienia, czyli Wstawy całey; te liniie tak się do siebie mieć będą, iak Wstawy tychże dwóch kątów.

325.

325. *Twierdz.* 1. W każdym Tróykącie boki tak się maią do siebie, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokóm.

Tab. XVIII. Fig. 2. Niech będzie Tróykąt ABC; bok iego na przykład AC, tak się má do boku BC = iak wstawa kąta B, do wstawy kąta A.

Dowodz. z wykréśléniém. Na danym Tróykącie opiszmy koło, i poprowadźmy śrzednicę CD, i ciénciwy DA, DB. kąty: BDC, BAC są równé, bo są w okręgu, i zamykaią ramionami swémi iednakowy łuk BC. Dlá téyże przyczyny równé są także i kąty: ADC, ABC. Oprócz tego, kąty: CBD, CAD są prosté, bo są w półkole; więc Linie CB, CA, będą wstawami kątów: CDB, CDA względém téyże samey wstawy całéy, czyli promiénia CD; a zatém tak się mieć będą do siebie té linie, iak wstawy kątów A i B.

Możná ieszcze i następuiącym sposobém tego samégo dowieśdź.

Opisáwszy koło na danym Tróykącie, połowy boków iego, będą wstawami połowy kątów we śrzodku im przeciwnych; a zatém będą też i wstawami kątów Tróykąta przeciwnych tymże bokóm, (biorąc za Wstawę całą, promień tego koła.) Są tedy do siebie połowy tych boków, iak wstawy kątów im przeciwnych: a że połowy tak się maią do siebie, iak ich całości; więc

więc też i całe boki Tróykąta, tak się do siebie mieć będą, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokóm.

326. *Wniosek.* Za pomocą Táblicy na Wstawy ułożoney podług promienia iakiegokolwiek, można doyśdź stósunku boków Tróykąta, którego kąty są nam iuż wiadome; a zatém, gdy ieszcze i bok ieden tegoż Tróykąta iest wiadomy: będzie można znaleźć i dwa insze iego boki.

327. Jakoż rachowano i ułożono Táblicę Wstáw podług promienia podzielonego n. p. na 100 000 części równych. Ten a nie wiekszy podźiał, zwłaszcza w táblicach do zwyczaynieyszego używania ułożonych, znáyduie się. Żeby zaś rachunek krótszym i łatwieyszym uczynić; przydano i táblicę logarytmów, Wstáw tychże. W takowych iednak táblicach, gdzie i logarytmy wstáw znáyduią się, uważano promień, albo wstawę całą, iak gdyby na 10 000 000 000 części równych była podzielona, a zatém, iak gdyby logarytm iéy, miał za céchę czyli początkową liczbę: 10, która oznácza, iż wstawa zawiérá w sobie liczbę części równych złożoną z znaków liczebnych iednym więcéy; ták, iak cécha logarytmu wstawy całéy, toiest, liczba: 10, oznácza, iż wstawa cała zamyká w sobie znaków liczebnych 11, zamykaiąc części równych: 10 000 000 000.

Nie

Nie wykłáda się teráz iak ułożone są té táblice; podány tylko będzie sposób ich używaniá. W táblicach tych znáyduiémy na dwóch kártach iednéy obok drugiey, w dwóch różnych słupach czyli kolumnach, Wstawy dwóch kątów, których summa czyni kąt prosty, albo 90°. Táblica tych wstáw po lewéy ręce kart, rozciągá się od 0, aż do 45°. Táblica zaś po prawéy ręce idzie wspak od 90°, aż do 45. Te kąty których stopnie wyrażoné są po prawéy ręce, nazywaią się *dopełnieniem* tamtych (complementum) do 90°; a ich wstawy *wstawami dopełnieniá* (sinus complementi) czyli krócéy, *Dostawami* (Cofinus.)

328. Summa kwadratów, z Wstawy, i z dostawy łuku, albo kąta równá się kwadratowi promiénia, czyli wstawy całéy.

Táb. XVIII. *Fig.* 2. Bo ponieważ dwa łuki, n. p. AB, i FB, (albo dwa kąty: ACB, i FCB) są dopełniéniém iedén drugiégo; Wstawa BG, łuku FB, równá iest linii CD; kwadrat zaś linii CD z kwadratém wstawy BD równá się kwadratowi promiénia BC: więc i summa kwadratów z BG i BD, równá będzie kwadratowi promiénia BC.

329. *Przystósowanié.* Maiąc na polu wymierzoną podstawę, i kąty które czyni podstawa z dwiéma liniiami wykie-

rowanémi ku iednému celowi, znaléźć tych ostatnich dwóch liniy długość?

Niechby Tróykąt ABC, wyráżił Tróy-kąt na polu zawarty między podstawą wymiérzoną i dwiema liniami dążącémi ku iednému célowi. Tab. XVIII. Fig. 3.

Niech będzie AB = 1200
A = 50°
B = 72°
więc A+B = 122°
a zatém — 180° — (A+B) = 58° = C
Wstawa kąta C: Wstawy kąta A = AB:
BC wsta: C: wsta: B = AB: AC

Log: AB = 3,079 181 2.
Log: wst: A = 9,884 254 0.

Summa = 12,963 435 2.
Log: wst: C = 9,928 420 5.
Różnica = Log:BC = 3,035 014 7.
A zatém bok BC = prawie 1084.

Z piérwszéy tedy proporcyi znáydziémy bok BC, dodaiąc do siebie logarytmy wstawy A, i boku AB, a odiąwszy od ich summy, logarytm wstawy C; rożnica albowiém dwoch logarytmów ostatnich, pokazuie logarytm boku BC., który bok w tablicy osobnéy logarytmów liczb, znáydziémy przy tymże logarytmie = 1083, 96. toiest prawie = 1084.

Po-

Podobnym sposobém znáydziémy z drugiéy proporcyi, i drugi bok AC = 1 345, 76.

Dlá skrócéniá rachunku, możná z początku zaráz odiąć logarytm wstawy kąta C, od logarytmu liczby wyrażaiącéy bok AB, dodáwszy do céchy tego drugiégo logarytmu liczbę 10 (co na pamięci miéć potrzeba:) Powszechnie zaś dodaiąc osobno logarytmy wstaw kątów A i B, do logarytmu liczby wyrażaiącéy bok AB, dochodziémy dwóch boków inszych.

Możná także wygodnie użyć w rachunkach Trygonometrycznych dodáwania, zamiást odeymowaniá, kładąc dopełniéniá logarytmów. (g) na mieyscé tych, które przez nich są dopełnione.

J tak w piérwszym przykładzie, ponieważ wstawa kąta C, iest piérwszym wyrazém proporcyi, z któréy szukamy boków AC, albo BC; podstawa zaś AB iest iednym z wyrazów śrzednich, a drugim wstawa kąta A, lub B; ieżeli tedy do logarytmu podstawy AB, dodámy do-

(d) Dopełniéniém logarytmu nazywá się ta liczba, która z nim razém czyn. logarytm prorniénia, iak na przykład, 0,071 579 5 z logarytmém wstawy C. 9,928 420 5 = 10,000 000 00.

dopełniénié logarytmu wstawy kąta C; ta summa dodaná ieszcze do logarytmu wstawy kąta A, lub B, będzie logarytmem boku BC, albo AC, odiąwszy tylko logarytm promienia.

Przykład. Dopełniénié logarytmu wstawy - - C = 0,071 579 5.
Log: AB = 3,079 181 2.
Log: wst: A = 9,884 254 0.

Summa zmnieyszoná liczbą 10. - = 3,035 014 7 = Log: BC.

Więcéy ieszcze podobnych przykładów Ucznióm podadź należy.

339. *Przyst:* 2. Maiąc dané kąty, i bok iedén Tróykąta, znaléźć powiérzchnią iego przez iednę proporcyą.

Niech będzie tén sám, co wyżéy, Tróykąt, którégo wiadomé nám są kąty i podstawa AB: szukáymy powiérzchni tego Tróykąta, spuściwszy prostopadłą CD.

Wst: C: Wst: A = AB: BC.

Promiéń: Wst: B = BC: CD.

Więc Pr: + Wst: C: wst: A + wst: B
- = AB: CD.
= AB^2: AB + CD
= AB^2:2. Powiérzchni

A za-

A zatém, 2 Pr.+ wst. C: wst. A +
- . . wst. B = AB²: Powiérzchni.
Log. AB = 3. 079 181 2.

Logarytm tén dwa razy wzięty =
Log: - Ab² = 6, 158 362 4.
Log: Wst. A = 9, 884 254 0.
Log: Wst. B = 9. 978 206 3.
Summa = 26, 020 822 7.

Log: 2 = 0, 301 030 0.
Log. Wst. C = 9, 928 420 5.
Log. Pr. = 10, 000 000 0.
Summa 20, 229 450 5.

Różnica tych dwóch summ: 5, 791 372 2, iest logarytmém liczby, która oznaczy powiérzchnią, a ta będzie = 6 185 46. blizko.

Proporcyá tá, z któréy doszliśmy powiérzchni Tróykąta, tak się wyrażá: Prostokąt z Wstawy całéy, czyli z promiénia, i z wstawy kąta przeciwnego iednému bokowi, tak się má do prostokąta wstáw dwóch kątów przy tym boku; iak się má ténże sám bok, do prostopadłéy nań spuszczonéy od wiérzchołka kąta przeciwnégo: albo téż, prostokąt z promienia, i z wstawy kąta przy wiérzchołku, tak się má do prostokąta z wstáw dwóch kątów przy podstawie; iak

iak się má podstawa do wysokości Tróykąta.

331. *Przyſt.* 2. Maiąc dané w liczbach dwa boki Tróykąta, i kąt między niémi zawarty, znaléźć powiérzchnią tego Tróykąta przez iednę proporcyą.

Niechby W Tróykącie ABC, znané były boki: AB, AC, i kąt A.

Spuśćmy na podſtawę AB, proſtopadłą CD; będzie

Pr. Wſt. A=AC: CD.
=AC × AB: CD × AB.
=AC × AB: 2 powierzchni

A zatém
Pr. Wſt. A=AC × AB: powiérzchni.
2.

To ieſt: tak się má promień do wſtawy iednego z kątów Tróykąta, iak połowa proſtokąta z dwóch ramion kąta danego, do powiérzchni Tróykąta.

Niech będzie AB=384.
AC=405.
A=50°.

Log. $\frac{1}{2}$ AB = Log. 192=2,283 301 2.
Log: AC= - - 2,607 455 0.
Log. Wſt. 50° = - 9,884 2540.

Summa

Summa zmnieyszoná liczbą 10. (toieſt logarytmém promiénia) =4,775 010 2. a zatém powiérzchniá któréy szukaliśmy =5 9767.

Táb.XVIII. Fig. 4. 332. *Przyſtós.* 4. Maiąc dany Tróykąt proſtokątny, którégo wiadomá ieſt przeciw proſtkątna i iedno ramié kąta proſtégo, znaléźć inszé dwa kąty, i bok trzeci.

Wziąwszy w tym Tróykącie przeciwproſtokątną za promień, ramiona kąta proſtego, będą oráz wſtawami kątów im przeciwnych; a zatém gdyby daná przeciwproſtokątná była wyrażoná przez 100 000, i znaczyła promień na tylé części równych podzielony; szukaiąc w tablicach między wſtawami, lub doſtawami, znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą bok drugi dany, a liczba ſtopniów odpowiadaiacá téy wſtawie, pokazałaby wáżność w ſtopniach, kąta przeciwnego bokowi danemu.

Gdyby zaś przeciwproſtkątná, przez inszą liczbę była wyrażona, a nie przez tę, któráby się równała wſtawie całéy w táblicach znayduiącéy się; w takim razie użyćby trzeba naſtępuiącéy proporcyi:

BC: AC = Pr. wſt. B.

Niech będzie BC = 1548.

AC

AC = 1248.

Log. AC = 3,096 214 6.

Przydáwszy log. Pr. = 13,096 214 6.

Log. BC = 3,189 771 0.

Różnica = 9,906 443 6. = Log. Wſt: B.

B = 53°, 44′ — toieſt, 53 ſtopniów, i coś mniéy niż 44 minut.

C = 36°, 16′, + toieſt 36 ſtopniów, i coś więcey niż 16 minut.

Pr. wſt. C = BC: AB.

Log. BC: = 3,189 771 0.

Log. wſt. C = 9,771 987 2 +

Odiąwszy Log. promiénia będzie tych dwóch Logarytmów Summa = 2,961 758 2 + = Log. AB: a zatém AB = 915,7 +

Jeśli tylko samego boku AB, znaleziénié ieſt potrzebné, możná ſkrócić rachunek, biorąc summę logarytmów ſummy i różnicy przeciw proſtkątney, i boku danégo, i dzieląc tę ſummę przez 2: które to

to działanie na tém się zasadza, że kwadrat boku AB, równa się różnicy kwadratów przeciw proſtkątney BC, i boku drugiego AC, albo (co na iedno wychodzi) prostokątowi z ſummy ich i z różnicy, toieſt prostokątowi z summy BC + AC i z różnicy BC — AC. Summa tedy logarytmów ſummy: BC + AC, i różnicy BC — AC będzie logarytmem kwadratu, AB^2, a zatem połowa tey summy logarytmów, będzie logarytmem Pierwiaſtku, toiest boku AB.

$$BC + AC = 279\,6.$$

$$BC - AC = 300.$$

Log. (BC + AC) = 3,446 537 2.

Log. (BC — AC) = 2,477 121 3.

Summa = 5,923 658 5.

Połowa = 2,961 829 2. = Log. AB.

A zatém bok AB = 915,8+.

Porównywaiąc z sobą tę ważność dwoiaka boku AB, która z dwóch odmiennych rachunków wypada, postrzegamy różnicę mnieyszą niż $\frac{1}{9000}$ całey ważności; która to rożnica, ſtąd pochodzi, że w pierwszym rachunku braliśmy kąty

B i C

B i C w samych stopniach i minutach piérwszych nie szukaiąc minut drugich.

333. *Przystós: 5.* Maiąc dany w Tróykącie roztwartokątnym kąt roztwarty, bok iému przeciwny, i iedno z dwóch ramiou iego, znaléźć drugié ramié i dwa inszé kąty?

Niech będzie Tróykąt ACB, któręgo dany iest kąt roztwarty CAB, bok CB iému przeciwny, i ramié iedno AC; znaléźć inszé kąty: B i C, i bok AB. Táb. XVIII. *Fig.* 5.

Sposób 1. postępowania. Z téy proporcyi, BC: AC = Wst: A: wst: B; dóydziémy kąta B, a odiąwszy od 180°, summę kątów A i B, reszta pokaże kąt C.

Z drugiéy proporcyi, wst: A: wst: C = BC: AB, wiadomy będzie bok AB.

Sposób 2. Spuśćmy prostopadłą CD, na bok przedłużony BA.

W Tróykącie prostokątnym ACD, którégo bok AC i kąt A iest wiadomy, można doyśdź dwóch boków CD i AD, ze dwóch następuiących proporcyy.

Pr. Wst: A = AC: CD.
Pr. Dostawy A = AC: AD.

Maiąc wiadomą w Tróykącie prosto-

U ką-

kątnym BCD, przeciwprostkątną BC, i
jedno kąta prostego ramię. CD, będzie
można doyśdź (332.) boku BD, od któ-
rego odciąwszy AD, znaydziémy bok AB.

Przykłady wyżéy podané już dosyć
obiaśnić były powinny, jak daléy sobie
w tém działaniu postąpić.

Táb.XVIII. *Fig.* 6. Podobnégo sposobu użyć należy gdy
kąt ostry iest dany, i bok iému przeci-
wny większy od drugiego boku danégo.
Ta tylko iest różnica, że w drugim sposo-
bie postępowaniá liniá AB, będzie sum-
mą, a nie różnicą linii BD, AD.

Táb.XVIII. *Fig.* 7. Gdy zaś bok CB, przeciwny kątowi
danému A, mnieyszy iest od boku dané-
go AC, który służy za ramię témuż ką-
towi; w takim razie wstawa kąta B
wynaleziona z proporcyi: CB : AC =
wst. A wst. B może bydź równie wsta-
wą dwóch kątów B, B, iednego ostrégo,
a drugiego rozwartego, i tamtén speł-
niającego do 180°. Podług drugiégo spo-
sobu postępowaniá, liniá AB, AB mo-
że bydź summą, albo różnicą linii AD,
BD, albo BD: co daie dwa odmiénné
Tróykąty: ACB, ACB: które lubo ma-
ią w sobie dwa boki dané i kąt ostry
także dany; różnią się iednak trze-
cim bokiem, i dwoma inszémi kątami.
Zgádzá się to zupełnie z tem, co się już
w Geometryi okázało w Rozd. II.

334. *Przystósowanie 6.* Maiąc daną liczbę boków w wielokątach foremnych, wyznaczyć ważność ich boków względem promienia koła, w które też wielokąty mogą bydź wpisane.

Rozwiązanie. Połowa boku każdego w foremnym wielokącie, w koło wpisanym, iest wstawą połowy kąta we środku tegoż wielokata, wziąwszy za promień, promień koła na tym wielokącie opisanego.

Liczba boków Wielokąta.		*Połowy kątów we śrzodku kątów*		*Wst: Połowy we śrzodku*
3	-	60°	-	86602.
4	-	45°	-	70711
5	-	36°	-	58779
6	-	30°	-	50000
7	-	25° $\frac{5}{7}$	-	43388
8	-	22° $\frac{1}{2}$	-	38671
9	-	20°	-	34202
10	-	18	-	30902
11	-	16 $\frac{4}{11}$	-	28171
12	-	15°	-	25882
15	-	12°	-	20791
16	-	11° $\frac{1}{4}$	-	19509
20	-	9°	-	15643
24	-	7° $\frac{1}{2}$	-	13053
i t. d.		i t. d.		i t. d.

Té wstawy, dwa razy wzięté, są bokami wielokątów wpisanych w koło, którego promień=100 000.

 Niech-

Niechby był Tróykat proſtokatny, którégo wiadomé sa dwa ramiona kata proſtégo; trzeba znaléźć przeciw proſtkątną, i dwa inszé kąty.

Już się wyżéy pokázało, że maiąc dané dwa boki w Tróykacie proſtokątnym, znáyduie sie przeciw proſtkatná, dodawszy do siebie dwa kwadraty tychże boków, i z summy wyciagnawszy piérwiaſtek kwadratowy. Ale gdy liczby oznaczaiące wielkości boków danych, są bardzo wielkié; nie mało czasu trzebaby na podniesiénié tych liczb do kwadratu; a że i summa tych kwadratów będzie bardzo wielká, iż z niey piérwiaſtku kwadratowégo wyciagnać przez logarytmy niémożná, a wyciągać go zwyczaynym sposobém długáby pracá była; przeto dlá większéy wygody, w téy i wielu inszych okolicznościach, wyrachowano w tablicach logarytmów, i insze ieszcze, oprócz wſtáw, liniie.

335. *Defin* Niech będzie łuk koła iakiégo, a od iednégo końca, tego łuku niech będzie prowadzona ſtyczná, tak daleko, aż się spotka z promieniem przedłużonym, i przechodzącym przez drugi koniec tego łuku. Ta część ſtyczney zamknietá miedzy punktem dotknięciá koła, i promieniém przedłużonym nazywá się *Styczną Troykątmiérſką*) Tangens Trigonometrica) albo tylko *Styczną* tego łuku.

łuku. Liniiá zaś zawartá między śrzodkiém koła, i między punktém, gdzie promień przedłużony przeciná ſtyczną, nazywa się *Sieczną Troykątmierſką.* (Secans Trygonometrica) albo tylko *Sieczną* tego łuku.

Jtak liniie AT, CT są, piérwszá ſtyczną, a druga sieczna łuku AB Jest także piérwszá liniiá ſtyczną, a druga sieczną kąta ACB, biorac za promień liniią CA. Ponieważ łuk FB, ieſt dopełniéniém do 90°, łuku AB: ieżeli tedy poprowadzimy ſtyczną FP, aż do iéy spotkaniá się z promieniém CA przedłużonym; liniiá FP, będzie ſtyczną, a CP sieczną dopełnieniá łuku AB, a inaczéy ieſzcze piérwsza nazywa się *Doſtyczną* (cotangens) drugá zaś *Dosieczną* (Consecans) łuku AB, Táb.XVIII. *Fig. 1.*

Jak względém wſtáw, tak względém ſtycznych i siecznych, uwázano w táblicach, iedné łuki tylé przewyższaiącé 45°, ilé drugié, nie dochodzą 45°; uważano zatém i co do ſtycznych, i co do siecznych, dopełnienia iednych łuków względém drugich.

336. *Na przykłád*; Tróykąty DCB, ACT są podobné; więc.

1. DC: DB=AC: AT, toieſt doſtawá tak się má do wſtawy, iak promień do ſtycznéy.

2.

2. DC: CB=AC: CT, czyli dostawa do promienia, iak promień do sieczney.

Tak też dlá podobieństwa Tróykątów: BCG, PCF będzie.

1. Wstawa do dostawy iak promień do dostyczney.

2. Wstawa do promienia, iak promień do dosieczney.

Maiac styczné, łatwo możná wyrachować dostyczné. Bo, poniewáż podobne są Troykaty ACT, FPC, bedzie, AT: AC= CF: FP, toiest, promień bedzie śrzednim Geometrycznym między styczną i dostyczną; Logarytm tedy promienia dwa razy wzięty, równá się summie logarytmów styczney i dostyczney.

337. Styczné rosną, zacząwszy od 0, aż do styczney 45°, którá się równá promieniowi, (bo w tym razie Tróykąt ACT będzie równoramiennym) i daley ieszcze rosną aż do 90°, których styczná bedąc od promienia CF równoodległą, nigdzie się z nim nie zeydzie: a zatem większa iest, od wszelkiey długości któraby wyznaczyć możná.

Sieczné podobnym, także iak i styczné rosną sposobem.

338. Niechby był Tróykat iakikolwiek prostokątny, na przykład CAB, którégo wiemy w liczbach dwa ramiona kąta prostégo CAB. Táb. XIX. Fig. 1.

Wziawszy za promień, na przykład liniią CA, liniiá AB będzie styczną, a liniiá CB, sieczną kąta C.

Gdybyśmy tedy mieli liniią CA, toieſt, promień wyrażony w táblicach przez 100000; liczba stopniów, przy którey znaleźlibyśmy liczbę wyrážaiącą liniią AB, czyli styczną, pokazałaby ważność kąta C: i znowu liczba między siecznémi odpowiedaiącá kątowi C, oznaczyłaby ważność linii CB.

Gdyby zaś liniiá AC, nie była w tych liczbach wyrażona, w których wyrażoná iest wstawa cálá, czyli promień táblic, w takim razie trzeba zrobić dwie proporcye, piérwszą AC: AB = Pr. styczney C, z którey dóydziemy ważnosci kąta C, drugą Pr: Siecz: C = AC: CB.

Przykł: Niech będzie AC = 8464,
AB = 5678.

Logarytm AB z przydanym Log: promienia iest - 13,754 195 4.
Log. AC - 3,927 575 7.

Ró-

Różnica, czyli Log. styczney - - - - - - - - C = 9, 826 619 7.
a zatém kąt C = 33°, 51.

Log. AC = 3, 927 575 7.
Log. siecz: C (odciąwszy Log. Pr.) = 0, 080 661 0.

Summa — 4, 008 236 7. =

Log: CB; więc CB = 10191. +

339. *Uwága*. Gdyby przyszło wyciągnąć piérwiastek kwadratowy z summy kwadratów $AC^2 + AB^2$, znaleźlibyśmy ważność przeciw prostkątnéy BC, większą niż 10192, a mnieyszą niż 10193; a zatém nie zgádzaiącą się z ważnością wyżéy znalezioną, 10191 +; co stąd pochodzi, że wyznaczaiąc ważność kąta C, opuściły się minuty drugié, i przestało się na samych stopniach i minutach piérwszych: i to opuszczénié sprawiło, że ważność BC, mnieyszą iednością prawie wypadła; ale uchybiénié takowé iest bardzo małé, gdyż od prawdziwéy ważności różni się tylko mało co więcéy iak $\frac{1}{10000}$.

Poprawa téy omyłki taká bydź może.

Ponieważ różnica między logarytmém styczney C, znalezionym, i logarytmém tablic naybliższym, iest 874, a różnica dwóch

dwóch logarytmów táblic mnieyszégo i większégo od logarytmu znalezionego, iest: 2730°, więc będzie, 2730: 874 = 60″: 19″, a zatém kąt C = 33° 51′ 19″

Log. - AC = 3, 927 575 7.
Log: siecz: C
(odciąwszy Log.P.) = 0, 080 688 0.

Sum: czyli Log: BC = 4, 008 263 7.
więc BC = 10 192+ = 10 192,1

340. *Przystósowanié.* W Tróykącie, w którym wiadomé są dwa boki, i kąt zawarty między niémi, znaléźć bok trźeci, i dwa inszé kąty?

Niech będzie Tróykąt ACB, w którym dané sa dwa boki AC, BC, i kąt C, trzeba stąd doyśdź boku AB, i dwóch inszych kątów. Táb. XIX. *Fig.* 2.

Rozwiązanié. Spuściwszy prostopadłą BD, na bok AC, w Tróykącie prostokątnym BCD wiémy przeciwprostkątną BC, i kąt dany C, a zatém doydziemy dwóch boków BD, DC: a że wiadomá także iest podstawa AC; więc odiąwszy CD od AC znáydziémy AD; i znowu w Tróykącie prostokątnym ADB z wiadomych dwóch ramion kąta prostégo, doyśdź będzie możná (338) inszych dwóch kątów, i przeciwprostkątnéy AB.

Ten

Tén sposób w tym iest nie wygodny, że trzeba cztéry uczynić proporcye, aby doyśdź boku AB. Jako zaś to, co z każdéy z piérwszych trzech proporcyy wypada, wchodzi w czwártą proporcyą, tak i omyłki tam popełniané, tu wpływaią.

Ażeby więc w tym, co z ostatniéy proporcyi wypadnie, uniknać uchybienia, należy iak naydokładniéyszy rachunek czynić w trzech piérwszych. J to ieszcze przydadź potrzeba, że w tym sposobie działania szukać się musi dwóch odcinków AD i DC, iako téż i wysokości BD, lubo o nie nié masz zapytania.

341. Gdyby przyszło dochodzić saméy tylko linii AB, w tym razie możnaby użyć naſtępuiącégo sposobu.

$AB^2. = AC^2 + BC^2 - 2AC \times CD.$

A że ieſt BC: CD=Pr: Doſtawy BCD

więc 2AC×BC: 2AC×CD=Pr. Doſt:BCD.

a zatém $2AC \times CD = \frac{2AC \times BC \times \textit{Doſt.}\ BCD}{Pr.}$

A stąd $AC^2 = AC^2 \times BC^2 - \frac{2AC \times BC \times \textit{Doſt.}\ BCD.}{Pr.}$

Że

że zaś tey ostatniey ilości nie można zawsze rozłożyć na insze mnożące ią ilości; więc przez same logarytmy działania tego wykonać w tym razie nie możemy;

W takowym tedy przypadku, używa się pospolicie następuiącey proporcyi.

342. *Twierdz:* 2. Summa dwóch boków Tróykąta, tak się ma do różnicy tychże boków; iak styczna połowy summy dwóch kątów przeciwnych tym bokóm do styczney połowy różnicy tychże kątów.

Trzeba tu naprzód wyłożyć ucznióm, co się rozumie, przez wyrazy tey proporcyi; a w szczególności pokazać im, że stósunek między stycznémi połowy dwóch kątów, albo dwóch łuków nie iest tén sám, co między stycznémi całych tych kątów albo łuków. Widocznie się to okazuie w tablicach Trygonometrycznych.

Niech będzie Tróykąt ABC, w którym bok AB, mnieyszy iest od boku AC; w tym Tróykącie będzie. Tab. XIX. *Fig. 3.*

$$AC+AB:AC-AB=\text{stycz}n: \frac{B+C:}{2} \text{ stycz}: \frac{B-C.}{2}$$

Dowodz: Wziawszy AD=AB, i pociągnawszy BD Tróykąt równóramienny ABD, i Tróykąt nie równoramienny ABC, maią kąt spólny A. Więc summa kątów ABD, ADB, równa się summie kątów

tów ABC, ACB; a zatém iedén z kątów Tróykąta równoramiénnego, n p. kąt ABD, równá sie połowie summy dwóch kątów ABC, ACB Tróykątą ABC. Kąt ABC, większy z dwóch kątów ABC, ACB, składá się z połowy summy, i z połowy różnicy tychże dwóch kątów: a że kąt ABD, ieſt połową ich ſummy; więc kąt CBD będzie połową ich różnicy.

Liniiá DC ieſt różnicą dwóch boków AC, AB; przeciąwszy ią na dwie równé części w punkcie F, liniiá CE będzie połowa różnicy dwóch boków AC, AB. A że bok większy AC, równá się połowie summy wráz z połową różnicy tychże dwóch boków; więc AE będzie połową ich ſummy, gdy CE ieſt połową różnicy; a zatém linii AE, CE tak się maią do siebie, iak połowa ſummy boków AC, AB, do połowy ich różnicy. Na tém więc całe działanié rozchodzi się, aby pokázać, iż ſtyczné kątów ABD CBD, tak się maią do siebie, iak liniie. AE, CE.

Z Punktu A, ſpuśćmy na BD, proſtopadłą AF, przedłużywſzy ią aż do G. Ponieważ Tróykąt BAD ieſt równoramiénnym; liniie BF, FD będą równé; a że też są równé liniie DE, CE; więc pociągnąwszy linią FE, podobné będą Tróykąty: BDC, FDE, i liniie FE, BC równoodległe; a zatem i Tróykąty AFE, AGC są podobné, będzie więc AE: CE =

AF:

AF: FG. że zaś wziawszy za promień liniia BF, liniie FA, FG. będą ſtycznemi kątów: FBA, FBG, albo ABD, CBD; więc AE:CE=ſtycz:ABD:ſtycz: CBD; albo

$$\frac{AC+AB}{2}:\frac{AC-AB}{2}=\text{ſtycz}:\frac{B+C}{2}:\text{ſtycz}.\frac{B-C}{2}$$

albo nakoniec,

$$AC+AB:AC-AB=\text{stycz}:\frac{B+C}{2}:\text{ſtycz}:\frac{B-C}{2}.$$

343. *Przyſtósowanie* 1. Gdy dwa boki AC, AB, są wiadome, będzie wiadomá ich ſumma AC+AB, i ich różnica AC—AB; gdy także wiemy kąt A, wiedziec tém samém będziémy summę i połowę summy dwóch inſzych kątów B i C, a zatém i ſtyczną połowy téy ſummy; więc i czwártégo wyrazu proporcyi poprzedzaiącéy, toieſt styczney połowy różnicy tych dwóch kątów doydziemy: a stąd wiadomá nám będzie i połowa różnicy tych dwóch kątów. Wiedząc zaś połowę ich ſummy, i połowę różnicy, gdy połowę ſummy do połowy różnicy dodámy, znáydziémy kąt większy B, á odiąwszy połowę różnicy od połowy ſummy, okáże się kąt mnieyszy C. Znáydziémy nakoniec i bok trzeci BC.

Przykł: Niech będzie

AC=2452. AC+AB=4296.
AB=1844, AC—AB= 608.
A=44° B + C= 136°.
$\frac{B+C}{2}$= 68°.

4296.

4296 : 608 = stycz. 68° : stycz: $\frac{B-C}{2}$

Log. stycz: 68° = 10,393 590 4,

Log: 608 = 2,783 903 6,

Summa - - 13,177 494 0.

Log: 4296 = 3,633 064 3.

Różnica = 9,544 429 7. =

Log: stycz: 19. 18′ + toiest i coś więcey

$\frac{B-C}{2} = 19°. 18′. +$

A że $\frac{B+C}{2} = 68°$ więc

B = 87°. 18′, +

C = 48°. 42′. —

Wst: C: wst. A = AB: BC

Log: AB = 3,265 760 9.

Log: wst: A = 9,841 771 3.

Summa = 13,107 532 2.

Log.

Log. wst. C= 9,875 792 7. —

Reszta, toiest Log: BC=3,231 739 5 +
BC= 1705+

Aby się przeświadczyć o dokładności tego działania szukaymy BC, i przez drugą proporcyą; wst: B: wst: A=AC: BC.

Log: AC=3,389 520 5.
Log. wst: A=9,841 771 3.

Summa= 13,231 291 8.
Log. wst. B=9,999 517.6 +

Reszta =3,231 774 2—
więc BC= 1705, 2 —

344. *Przystósowanie* 2. Wyznaczyć przez rachunek odległość dwóch mieysc nie dostępnych.

Widzieliśmy (w Rozd: XI.) że do tego trzeba było wymierzyć podstawę i wyznaczyć kąty, które przy końcach podstawy czynią dwie linie wykierowané ku dwóm punktóm, których odległości szukámy. Możná doyśdź i przez rachunek żądanéy odległości.

Niech będźie AB podstawa wymierzona, i wyznaczoné kąty: XAB i AB, XBA, i BA. Táb. XIX. *Fig.* 4. Po-

Ponieważ w Tróykącie XAB, wiémy dwa kąty przy podstawie; odiąwszy więc ich summę od dwoch kątów prostych, albo od 180°, reszta pokaże kąt trzeci AXB.

Podobnym sposobém doydziémy i kąta AYB.

W Tróykącie AXB, maiąc wiadomą podstawę AB, i wszystkié kąty, można doyśdź dwóch inszych boków, a w szczególności linii AX.

Podobnie i w Tróykącie AYB z wiadomego boku AB, i wszystkich kątów, można wyznaczyć dwa inszé boki, a w szczególności liniią AY.

W Tróykącie na koniec XAY znaiąc dwa boki AX, AY, i kąt XAY między niémi zawarty, (który iest różnicą między kątém wyznaczonym XAB, YAB;) można doyśdź linii XY, toiest, żądaney odległości.

Uwága. Ponieważ wyznaczénié linii XY, zawisło od linii AX, AY; dokładność też w wyznaczéniu linii XY, zawisła od téy dokładności, z którą dwie tamté liniie były wyznaczoné.

Przy-

Przykład. Niech będzie

XAB = 77° więc AXB = 49°.

YAB = 42° AYB = 36°.

YBA = 102° XAY = 35°,

XBA = 54°.

AB = 1200.

Wsta: AXB: wst: XBA = AB: AX.

Log: AB = 3, 079 181 2.

Log: wst. XBA = 9, 907 957 6.

Summa = 12, 987 138 8.

Log. wst. AXB = 9, 877 779 9.

Reszta = 3,109 358 9, = Lo: AX

AX 1286, 35.

Wsta. AYB: Wst. ABY = AB: AY.

Log. AB = 3, 079 181 2.

Log. Wst. ABY = 9, 990 404 4.

Summa = 13, 069 585 6.

Log. Wst: AYB = 9, 769 218 7.

Reszta = 3,300 366 9. = Log: AY.

Więc AY = 1996, 95.

Znalazszy bok AX = 1286, 35.

AY = 1996, 95.

W Kąt

Kąt między témi bokami zawarty XAY = 35.

Będzie - - AX + AY = 3283,30.

AY — AX = 710,60

AXY + AYX = 145°.

$\frac{AXY + AYX}{2}$ = 72° ½.

Więc (podług Twierdz: 2. §. 342)

3283,3 : 710,6 = Stycz: 72 $\frac{10}{2}$: Stycz: - - $\frac{AXY - AYX}{2}$

Log. Stycz: 72 $\frac{10}{2}$ = 10, 501 277 7.

Log. 710, 6 - = 2, 851 625 2.

Summa = 13, 352 902 9.

Log. 3, 283 3 = 3, 516 310 6.

Różnica = 9,836 592 3. = Log: Stycz: 34°28′.

Więc $\frac{AXY - AYX}{2}$ = 34 28′.

A że iest $\frac{AXY + AYX}{2}$ = 72 30.

Więc AXY = 106 58.

AYX = 38 2.

Ma-

Maiac wiadomé wszystkie Kąty w Tróykącie XAY, i procz tego dwa boki: AX, AY; znáydziémy bok trzeci XY, toiest odległość, którey szukámy; a to przez iednę z tych dwóch proporcyy.

Wst. AYX ; Wst. XAY = AX: XY

Albo, Wst. AXY: Wst. XAY = AY: XY.

Szukáymy boku XY, przez piérwszą na przykład proporcyą; będzie

Log. AX = 3, 109 358 9.

Log: Wst. XAY = 9, 758 591 3.

Summa = 12, 867 950 2.

Log. Wst: AYX = 9, 789 665 2.

Różnica = 3, 078 285 0 = Log. XY.

Więc XY = 1197, 525.

Zostaie ieszcze, do rozwiązaniá tén przypádek, w którym z trzech boków danych w Tróykącie, szukamy kątów iego.

Sposób zwyczaynie używany, zawisł na tém, aby szukać dwóch odcinków podstawy oddzielonych przez prostopadłą, na tę podstawę spuszczoną, od wierzchółku kąta iéy przeciwnego.

345. *Twiérdz: przybrané.* Podstawa Tróykąta, tak się má do summy dwóch boków iego, iak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podstawy.

Táb. XIX. *Fig.* 5. Niech będzie Tróykąt ABC, w którym z wiérzchołka C, spuszczoná iest prostopadłá CD, na podstawę AB; w tym Tróykącie, AB: BC + AC = BC — AC: BD — AD.

Od punktu C, iak od śrzodka, promiéniém CA nakréślmy koło, któré przetnie podstawę AB w punkcie G, bok BC, w punkcie F, a ténże przedłużony, w punkcie E.

Będzie zatém

BE = BC + AC (bo AC = CE;)

BF = BC — AC (bo AC = CF:)

BG = BD — AD (bo AD = DG:)

A ponieważ sieczné BA, BE od iednégo punktu B wychodzą; więc (231) BA: BE = BF: BG, toiest, tak się má podstawa BA do summy dwóch boków = BE; iak się má różnica tychże boków = BF, do różnicy BG odcinków, któré czyni prostopadłá CD spuszczoná z wiérzchołka kąta C na Podstawę.

346. *Przystósowanié.* Ponieważ odcinków BD, AD, wiémy summę i różnicę; wie-

wiedzieć będziemy i każdy z nich z osobna, iako to iuż się wyżey pokázało: będzie albowiem większy odcinek $BD = \frac{AB+BG}{2}$, a mnieyszy $AD = \frac{AB-BG}{2}$.

A że, BC: BD = Pr. Dost: B.
A zaś AC: AD = Pr. Dost: A.

Więc doydziemy i kątów B, i A.

Przykład. Niech będzie

AB = 1200.
BC = 935.
AC = 612.
BC + AC = 1547.
BC — AC = 323.

Log: BC + AC = 3, 189 490 3.
Log: BC — AC = 2, 509 202 5.

Summa = 5, 698 692 8.
Log: AB = 3, 079 181 2.

Reszta = 2, 619 511 6.

Więc BD — AD = 416, 4. bardzo blizko,

$\frac{AB}{2} = 600.$

$\frac{BD - AD}{2} = 208,2$

Summa = 808, 2. = BD.
Różnica = 391, 8. = AD.
BC: BD = Pr. Dost: B.

Log:

Log: BD z przydanym Log: Pr. = - - - - - - 12, 907 518 8.

Log: BC = 2, 970 811 6.

Reszta = 9, 936 707 2 = Log: Dost: B.

Więc Kąt B. = 30° 11' 15".

AC: AD = Pr. Dost. A.

Log. AD = 2, 593 064 4.

Log. Pr. = 10, 000 000.

Summa = 12, 593 064 4.

Log. AC = 2, 786 751 4.

Reszta = 9,806 313 0 = Lo:Doſt.A

więc Kąt A = 50° 11' 37".

C = 99 37 8.

Dlá zapewniéniá się o tém, możná szukać, ieżeli stósunek Wstáw Kątów: A, i B, równá się, iak powinién, stósunkowi boków im przeciwnych; będzie zaś w saméy rzeczy równał się, gdy w proporcyi, którey trzéma pierwszémi wyrazami będą: BC. AC. Wst. A. za czwárty wyráz wypadnie Wstawa Kąta B, teyże saméy, co wyżéy ważności.

Log: Wst: A = 9, 885 481 1.

Log. AC = 2, 786 751 4.

Summa = 12, 672 232 5.

Log:

Log: BC = 2, 970 811 6.

Reszta = 9, 701 420 9. = Log: Wst: B.

Kąt B, odpowiadaiący tému Logarytmowi różni się mniéy niż $\frac{10}{2}$ od wyżéy znalezionégo.

347. *Uwága.* Nie trzeba opuszczać takowych doświádczéń, zwłászcza, gdy rachunki zawisły iedné od drugich.

W tym ostatnim razie, náylepiéy iest wziąźć za podstawę bok náywiększy Tróykąta: bo tak z zupełną pewnością wiedzieć będziémy, iż kąty przy téy podstawie są ostré.

PRZYDATEK I.

Przystósowániá Trygonometryi do różnych działáń na gruncie.

348. *Przystósowánié* 1. Wyznaczywszy na gruncie, a potém wyrachowáwszy położenia i odległości dwóch punktów, względém iedney podstawy, wzięta była za drugą podstawę odległość tych dwóch punktów i użyto iéy do wyznaczenia położéń innych Punktów, któré z pierwszych stanowisk, albo były nie widzialné, albo też od nich bardzo odległé. Trzeba teráz wyrachować położénia tych ostatnich punktów względém pierwszéy podstawy. Niech

Tab. XX. Fig. 1. Niech AB wyráżá pierwszą podstawę; XY, dwa punkta, których położénia, i odległości wyznaczoné iuż są względém téy podstawy, przez wymierzénie kątów przy A i B. Weźmy potém XY za drugą podstawę dlá wyznaczéniá położénia punktu Z, niewidzialnégo z pierwszych stanowisk: A i B, albo od nich bardzo odległego. Jakże to położénié punktu Z, wyznaczymy, względém pierwszéy podstawy AB?

Sposób póstępowaniá przez rachunek:

1. W Tróykącie AXB wyznaczymy AX.

2. W Tróykącie AYB wyznáczmy AY.

3. W Tróykącie XAY wiadomé maiąc: AX, AY, i kąt XAY, wyznáczmy: XY, i kąt: AXY.

4. W Tróykącie XZY, wiadomą maiac podstawę, i kąty wszystkié, wyznáczmy XZ.

W Tróykącie AZX wiadomé maiąc: AX, ZX, i kąt AXZ wyznaczmy AZ.

Podobnie możná wyznaczyć BZ.

349 *Uwága*. Tym sposobém postępuiac, możná także spráwdzać działaniá iedné przez drugié czynioné z różnych punktów stanowisk.

350. *Przyſtósowanié* 2. Do iakiéykolwiek linii czyniącéy kąt wiadomy z podſtawą stósować położeniá punktów wyznaczonych iuż względém téy podſtawy.

Niech będzie AC liniiá czyniacá kąt wiadomy z podstawą AB, i niech X, będzie punktém, którego położénié iuż ieſt wyznaczoné względém podſtawy AB; trzeba stąd doyśdź położenia tego punktu względém linii AC. Táb. XX. *Fig.* 2.

Doydziémy tego, spuściwszy proſtopadłą XP na liniią AC, i wyznaczywszy wielkość téy proſtopadłéy, iako też iey odległość AP od punktu A.

Sposób poſtępowaniá przez rachunek.

W Tróykącie AXB możná było wyznaczyć liniią AX, kąt XAB ieſt téż wiadomy; więc znáydziémy kąt CAX, który ieſt różnicą kątów CAB, XAB. W Tróykącie tedy PAX, maiac wiadomé kąty, i przeciw proſtkątną AX, można będzie wyznaczyć liniie: AP, i PX.

351. *Przyſt:* 3. Wyznaczyć promień koła, maiąc daną cieńciwę odcinka iego, i kąt tegoż odcinka.

Niech będzie AB liniiá daná, na któréy nakreślić trzeba odcinek koła mogący zawierac w sobie kąt dany; wyznaczmy promień tego koła. Táb. XX. *Fig.* 3.

Niech

Niech będzie C, śrzodek koła, szukanégo; poprowadźmy linią CD do śrzodka linii AB, ta będzie prostopadłą do AB. w Tróykącie ACD, kąt ACD równa się kątowi odcinka danemu, bo miarą iego, iest połowa łuku AB; kat CAD, iest iego dopełnieniem. Wziawszy AD za promień, będzie AC, sieczną kąta CAD, a zatém można wyznaczyć, promień koła szukanégo, z téy proporcyi; iak się má promień do dosieczney kąta danégo, tak się má połowa cienciwy danéy do promiénia koła, którégo szukámy.

352. *Uwága.* Stósunek AD do CD, równy iest stosunkowi wstawy całéy, czyli promienia, do styczney kąta CAD.

A że, ieżeli AB iest bokiém wielokąta forémnégo, będzie CD promieniém koła wpisanégo w tén wielokąt; więc maiąc dany bok wielokąta forémnégo, i wiedząc liczbe boków iego, można wyznaczyć, promień koła wpisanégo i opisanégo, przez dwie następuiące proporcye.

1. Wstawa cała, tak się má do Dostyczné polowy kąta we śrzodku koła, iak połowa boku wielokąta do promiénia koła wpisanego.

2. Wstawa cała tak má się do dosieczney połowy kąta we śrzodku, iak połowa boku wielokąta, do promienia koła opisanego.

353.

353. *Przystósowanie.* 4. Wyznaczywszy trzy boki Tróykąta na gruncie iakim uważanégo, i znaiąc kąty, pod któremi widzimy té trzy boki z iednego punktu, trzeba wyznaczyć odległość tego punktu, od trzech wierzchołków Tróykąta.

Niech ABC wyrażá Tróykąt, którégo wszystkich boków iuż doszliśmy, niech X, będzie punktém, z którego uważaliśmy kąty, pod któremi dały nam się widzieć liniie, AB, BC, AC; trzeba ieszcze wyrachować liniie: AX, BX, CX. Táb. XX. *Fig.* 4.

Niech będą D, i E, śrzodki kół, których odcinki nakréślone na liniiach AB, i BC mogą zawierać w sobie kąty równé tym, pod któremi widzieliśmy liniie AB i BC. Punkt X będzie w przecięciu tych dwóch kół.

Dwa promiénie BD, BE, mogą bydź wyrachowané tak, iak w przystósowaniu 3.

W Tróykącie ABC, w którym wszystkié boki są wiadomé, można wyrachować kąt ABC. Kąt ABD iest wiadomy, bo iest dopełniéniem kąta wiadomego AXB; więc wiadomy iest także i kąt CBD. A że wiémy i kąt CBE, który iest dopełnieniém kąta CXB; więc wiedzieć będziémy i kąt DBE; a zatém w Tróykącie DBE, wiémy dwa boki: BD, BE, i kąt

BDF,

DBE, między niémi zawarty; a zatém można wyznaczyć wysokość BE, która iest połową linii szukaney BX; albo, (co krócéy ieszcze będzie) można, w tym Tróykącie wyrachować kąty D, i E. Że zaś kąt we śrzodku D, równá się kątowi X A B, wspiéraiacému się na łuku dwa razy większym: a kąt weśrzódku E, iest spełnieniém (w téy figurze) kąta X CB, więc kąty, BAX, BCX są wiadome: a zatém w Tróykątach: BAX, BCX, wiémy kąty wszystkié, i boki: BA, BC; skąd będzie można wyznaczyć liniie AX, BX, CX, których szukámy.

Jedén prawie iest sposób postępowaniá na iakiékolwiek położénie punktu X. W tem tylko bywá odmiénny, że czasém trzeba dodáwać, a czasém odeymować kąty znayduiacé się przy B; i że czasém kąty D i E, równé są kątóm przy A i C, a czasém są ich spełniéniém.

354. Rachunek tén może bydź ieszcze skróconym w niektórych przypádkach szczególnych.

Táb.XXI. Fig. 1. *Przykład* 1. Niech punkt X, znáyduie się na przedłużéniu iednégo z boków Tróykąta ABC, n p. na przedłużéniu boku AB.

W Tróykącie C A X, wiadomé są kąty A,

A, X, i bok CA; więc będzie możná wyrachować boki: AX, CX.

Przykład 2. Niech trzy punkta: A,B,C, będą na iedney linii. Táb.XXI. *Fig.* 2.

Prostokąty AX × CX, i BX × CX są równé, pierwszy prostokątowi z prostopadłéy spuszczonéy od X, na AB, i ze śrzednicy koła opisanégo na Tróykącie AXC; drugi, prostokątowi z téyże prostopadłéy, i ze śrzednicy koła opisanégo na Tróykącie CXB; więc pierwszé dwa prostokąty tak się maią do siebie, iak i dwa drugié. A że pierwszé tak się maią do siebie, iak liniie AX, BX, a drugié tak się maią do siebie, iak dwie śrzednice; więc stósunek AX do BX iest wiadomy, bo iest równy stósunkowi śrzednicy koła opisanégo na Tróykacie ACX, do śrzednicy koła opisanégo na Tróykącie BCX albo równy stósunkowi promiéni tych dwóch kół. Szukaiąc tedy podstawy w Tróykącie, któryby miał kąt w wierzchołku równy kątowi AXB, a zatém wiadomy, i dwa ramiona równé dwóm wyżéy spomnionym promiéniom; gdybyśmy tę podstawę znaleźli równą linii AB; liniie też AX, BX, byłyby równé tym promiéniom. Gdyby zaś ta znaleziona podstawa nie była równá linii AB; tedy z dwóch następuiacych proporcyy doydziémy boków: AX, BX.

1.

1. Jak się ma podstawa znaleziona, do podstawy AB, tak się ma promień pierwszy do AX.

2. Jak się ma podstawa znaleziona, do podstawy AB; tak się ma promień drugi do BX.

Tym sposobém możémy też doświadczać, czyli działaniá naszé czynioné na ziémi, były dokładné.

355. *Przystós.* Niech będzie daná liniiá prostá na gruncie: wyznaczyć bez mierzeniá odległość i położeniá względém téy linii, dwóch punktów, z których widzimy obadwa iéy końce.

Táb. XXI. *Fig. 3.* Niechby wiadomá była n. p. liniiá AB, niech będą dwa punkta: C, i D, z których każdégo widzieć można końce A, i B, téy linii; wyznaczyć odległości, i położéniá tych dwóch punktów, C, i D, tak względem siebie, iak i względém linii AB, nie mierząc pierwéy żadnéy z tych odległości.

Z punktów C, i D, wyznáczmy kąty: ACB, DCB, ADB, ADC, a zatem i kąty: ACD, BDC.

Dáwszy iakąkolwiek ważność linii CD, możnaby z niéy dochodzić ważności linii: CA, CB, DA, DB, i AB.

Gdy

Gdybyśmy przypadkiém ważność téy ostatniéy linii AB, znaleźli równą prawdziwéy iéy ważności, którą wiémy; byłoby to dowodém, żeśmy natrafili na prawdziwą ważność linii DC, a zatem i inszych liniy.

Gdyby zaś znaleziona ważność linii AB nie była równa ważności iey wiadoméy; tedy następuiącą trzeba uczynić proporcyą: iak się má ważność mniemaná linii AB, do ważności iéy práwdziwéy, tak się má ważność mniemaná linii CD, do ważności iéy práwdziwéy.

Przystósowaniá do miár wysokości.

Mogą Nauczyciele namiénić tylko o sposobach wyznaczéniá wysokości iakiéy, czyli to przystępnéy, czyli téż nie dostępnéy przez samé żérdzie, albo przez odbiianié promiénia światła padaiącégo na powiérzchnią iaką płaską i sposobną odbiianiá, albo na koniec przez wielkość ciénia rzuconégo od tego przedmiotu (*obiectum*) którégo wysokość wyznaczyć mámy.

Piérwszy z tych sposobów, iako w przepisach swoich i z przyczyny łatwości, iest bardzo dobry, tak w używaniu bardzo nie doskonały. W ogólności nawet mówiąc, należy zawsze powątpiéwać o działaniach, choćby téż z náylepszémi

mi narzędziami czynionych, gdy idzie o wyznaczénié iakiéy wysokosci; iednostayná albowiém w sobie wysokość, n p. góry iakiéy, może się wydawać czasém większą, a czasém mnieyszą, podług nie iednakowégo stanu, w ktorym się znáydować zwykła nasza *Powiétrzniá*; (atmosphera) iako o tém obszérniéy będzie w Fizyce.

356. *Przykłós.* 1. Niech będzie iaká Wysokość nie wiadomá, do któréy iednak można przystąpić; trzeba wyznaczyć iéy wielkość, z punktu iakiégo oddalonégo od téyże wysokości.

Wymierzmy podstawę od punktu na gruncie obranego, aż do spodku téy wysokości: od tegoż punktu uważáymy iaki kąt czynią na płaszczyznie pionowéy dwie liniie, iedna ku wierzchołkowi téy wysokości, a drugá poziémnie wykierowaná. Znáydziémy wielkość téy wysokości nad liniią poziémną (którą perspektywa poziémnie ustawioná pokazuie) przez następuiącą proporcyą: iak się má wstawa cała do styczney kąta uważonégo, tak się má podstawa wymierzona do wysokości szukanéy. Dodáwszy do téy wysokości, wysokość narzędziá, znáydziémy całą wysokość, któréy szukaliśmy. (g)

357.

(g) W dálszych przykładach trzeba zawsze na to pamiętać, aby wysokość narzę-

357. *Uwága.* Rźádko się tráfiá, aby wcale przystąpić można do spodku wysokości, którą wyznaczyć przypádá. Tak na przykład, maiąc wyznaczyć wysokość wierzchołka wieży iakiéy, baszty i t.d. nié można wymierzać podstawy, tylko aż do spodku iéy murów; można iednak zmierzyć całą grubość wieży, baszty i t. d. a stąd wnieść położenié iéy, srzodka, a zatem i długość, którą dodadź potrzeba do podstawy wymierzonéy.

358. *Przystósʹ:* 2. Niech będzie wiadoma wysokość (i) z którey wierzchołka wyznaczyć przypádá odległość punktu położonégo na gruncie, a widzialnégo z mieysca stanowiska.

Ustawiwszy kątomiérz na płaszczyznie pionowey, iak wyżéy, naznaczmy kąt, który czyni perspektywa iedna w po-

X zie-

---

dziá dodáwać do wyrachowanéy Trygonometrycznie wysokości: co lubo się wyraźnie kłaśdź nie będzie, samé iednak okoliczności dostatecznie potrzebę tego okáżą.

(i) Wysokości wieży, lub iakiégo podobnégo budynku łatwo doyśdź można, spuściwszy z góry na dół sznur, który potém zmierzony, dá poznać tę wysokość. Trzeba iednak mieć báczność na to, aby sznur iednakowo wszędzie był wyciągniony. Obácz między innémi Dzieło iuż wyżéy zalécone. P. de Luc. Tom. 2. §. 546.

ziémném położéniu, a drugá wykierowaná ku punktowi, którégo odległości szukámy. Zróbmy potém tę proporcyą: iak się má wstawa cała do dostyczney kąta naznaczonégo, tak się má wysokość daná do odległości szukaney.

Uwága. Możná tym sposobém wyznaczyć odległość od spodku wysokości iakiéy, tylu punktów, ilé zechcémy; maiąc iuż wiadomą wysokość, z którey wierzchołka wyznáczać przypádá té odległości. Uważaiąc zaś, i znacząc kąty, które zrobi perspektywa (k) kierowaná do tych różnych punktów, będzie możná wyznaczyć i położenie ich, iednych względém drugich.

359. *Przystós:* 3. Maiąc wiadomą odległość punktu iakiégo od spodku wysokości, na którey się stoi, wyznaczyć tę wysokość.

Uwá-

(k) Té kąty [illegible] mówiąc, nie tak czyni perspektywa [illegible] do innégo punktu na[illegible] położonégo, kierowana, iako [illegible] płaszczyzny pionowé przechodzącé przez perspektywę za każdém celowaniém. Nay[illegible] się to [illegible] wykona: gdy [illegible] będzie [illegible] półkole prostopadle [illegible] do reszty narzędzia i opatrzoné perspektywą ruchomą.

Uważywszy kąt tak iak wyżéy, zróbmy tę proporcyą: Jak się má wstawa cała do styczney kąta uważonégo, tak się má odległość daná do wysokości szukanéy.

360. *Przystós*: 4. Niech będzie wysokość nie dostępná, trzeba ią wyznaczyć.

Sposób postępowaniá náypospoliciéy używany, zawisł na tém, aby wymierzyć podstawę iaką wprost téy wysokości, któréy szukámy, i naznaczyć kąty pod któremi z obudwóch końców tey podstawy, widzimy wysokość szukaną. Można stąd doyśdź, tak wysokości, iako téż i odległości iey spodka, od obudwóch końców podstawy.

Niech SP wyráżá wysokość, a AB podstawę wymierzoną wprost ku téy wysokości. Wyznaczmy katy A i B przez perspektywy, iednę poziemnie ustawioną, drugą ku wierzchołkowi S, wykierowaną. Táb.XXI. *Fig.* 4.

W Tróykącie ASB, zachodzi ta proporcyá.

Wst: ASB: wst: A = AB: BS.

W Tróykącie BSP, iest;

Wſt. cała: wst: B = SB: SP.

Więc wst: całá × wst: ASB: wst: A× wst: B = AB: SP.

 361.

361. *Uwága* 1. Tego sposobu używaiąc, można náprzód uchybić w braniu takiéy podstawy, którąby przedłużoną prosto prowadziła, do wysokości podaney do wymierzéniá; ponieważ zaś w wielu przypádkach trudno iest utrafić na takié podstawy położénié; będzie więc i wysokość stąd wyrachowaná, nie pewná. Powtóré, gdy podstawa AB, iest bardzo nachyloná względém linii AS, BS, kąt ASB, pod którym pokazuie się ta podstawa AB, iest bardzo mały względém kąta ASP, a zatém i podstawa AB wymierzoná iest bardzo mała względem całéy podstawy AP: skąd także wyznaczénié wysokości PS będzie mniéy dokładné.

362. *Uwága* 2. Gdy narzędzié, którégo używámy, opatrzoné iest w półkole pionowé; to będzie służyć do dániá tak dobrégo podstawie położéniá, iakiégo tylko grunt pozwoli.

Táb. XXI. *Fig.* 5. Niech liniiá AB wyráżá iakąkolwiek podstawę wymierzoną, a liniiá SP, niech wyráżá wysokość, któréy szukámy.

Ustáwiwszy półkolé pionowé tak, aby Prawidło ruchome zmierzało ku punktowi S, a zatém, aby liniiá SP, wpádała na płaszczyznę tego półkola; uważáymy kąt SAP na płaszczyznie pionowéy, i kąt PAB wyznaczony na płaszczyznie kąto-

kątomierza poziémnie ustawionégo. Zróbmy to samo i na drugim stanowisku, przy punkcie B.

W Tróykącie PAB, gdzie wiadomá iest podstawa, i wszystkie kąty, będzie

Wst. APB: wst. ABP = AB: AP.

W Tróykącie prostokątnym SAP, iest:

Pr: stycznéy SAP = AP: SP.

Więc Pr. × wst. ABP: wst. APB × stycz. SAP = AB: SP.

Gdyby nawet dlá iakiéy zawady nié można razém brać kątów pionowych, i kątów poziémnych; tedy iednak wyznaczaiąc ciag linii AP, BP, możnáby osobno wymierzyć kąty poziémné: PAB, PBA. Z tém wszystkiém wyznaczenié tego ciagu z wielką częstokroć pracą przychodzi.

363. *Przystós:* 5. Niech będzie daná liniiá na iakim gruncie, i niech będzie wysokość niewiadomá, z któréy wierzchołka można widzieć końce téy linii danéy. Trzeba wyznaczyć odległość tych dwóch końców, od spodka wysokości niewiadoméy, i tęż samę wysokość.

1. Uważaymy z wierzchołka wysokości, kąty na płaszczyznie pionowey, zawarté między liniią pionową, albo nitką z cieżarém zawieszoną, i między perspektywą wykierowana następnie do dwóch końców linii daney. Odległości tych końców, od spodka wysokości, tak się do siebie mieć będą, iak styczné kątów uważanych: (będą zaś té odległości stycznémi kątów tych wyznaczonych, gdy wysokość za promień wzięta będzie,) a zatém stósunek tych odległości będzie wiadomy. Uważaymy i tén kąt, który się zrobi na płaszczyznie poziémney kątomierza, przez płaszczyzny pionowé, na których znaydować się będzie perspektywa następnie do tych dwóch punktów kierowaná. Tén kąt równy kątowi zawartému między dwiéma liniiami prowadzonémi od końców podstawy do spodka wysokości, będzie kątem w wierzcholku Tróykąta, maiacego wiadomą podstawę i wiadomy stósunek ramion, a zatem można tén Tróykąt zupełnie wyrachować.

Uwaga. Gdy narzędzié tak iest zrobioné, że go nié można użyć do mierzenia kąta zawartego między liniiami, któreby od spodka wysokości prowadzoné były do dwóch końców Podstawy; w takim razie, trzeba mieć wiadomą wszystkich tych trzech punktów odległość: wyiąwszy, gdyby dwa końce

ee podstawy, były w jedney linii z spodkiém wysokości. (l)

PRZYDATEK II.

Piérwsze początki równowá-żéniá.

W piérwszych początkach, na których się równoważénie (*libellatio*) zasádzá, można uwážać ziémię, iakoby ta zupełnie miała figurę kuli. Różnica zachodząca między tą mniemaną, a prawdziwą iey figurą (spłaszczoną w końcach osi) bardzo mało wpływá w działaniá, o których tu mówić się będzie; wiadomości zaś potrzebne do czynieniá w rachunkach, popráw: z przyczyny nie zupełney ziémi okrągłości, byłyby teráz niewczesne i nad poięcie Uczniów.

364. Uwážaiąc Ziémię, iak gdyby zupełnie była okrągłą, i przeciąwszy ią płaszczyzną przez środek iey przechodzącą; przecięcie to byłoby kołem którego promień byłby ténże sám, co i promień ziémi.

(l) Gdyby nie było sposobności czynić na gruncie działáń, wyrażonych w tych ostatnich przystósowaniach; tedy dlá łatwieyszégo Uczniów poięciá, można działaniá té na figurach wyrobionych z drewna wykonywać.

ziémi. Na okręgu tego koła podzielonym na 360 ſtópniów rachuiąc mil Niémieckich 15. (które się nie wielé różnią od Polskich) na ieden ſtopień; cały tén okrąg zawiérać w sobie będzie mil Niémieckich 5400, a zatém śrzednica iego, to iest śrzednica ziémi mieć będzie długości mil prawie 1719. albo, rachuiąc okrągło: 1720.

Tę długość na mnieyszé miary Polſkié z Niémieckich zamiéniaiąc (sposobém w Arytmetyce podanym) będzie śrzednica ziémi, więcéy cokolwiek niż.

21 000 000, łokci Polſkich.
7 000 000, sążni
2 800 000, prętów
280 000, sznurów.

365. Mówi się, że dwa mieysca są do *równowági* (ad libellam,) gdy równą maią od śrzodka ziémi odległość. J tak powierzchnia wody ſtoiącéy, wszyſtkié punkta má do równowági.

Gdy liniiá iaká proſtopadła ieſt w punkcie powiérzchni ziémi do iéy promiénia, przez tén punkt przechodzacégo; ta liniiá prócz iednégo tego punktu spolnégo z promieniem, którégo odległość od śrzodka, równa się promiéniowi ziémi, wszyſtkié inné swoié punkta, dalszé mieć będzie

dzie w rzeczy samey od śrzodka ziemi: ale że przy takiey wielkości promienia ziemi, różnica położenia tey linii, okazuiącey *rownowagę pozorną* (libella apparens) od położenia wody stoiącey, która okazuie *równowagę prawdziwą* (libella vera), ta, mówię różnica tak iest mała, że chyba w znaczney bardzo odległości dá się postrzedz, przeto w zwyczaynieyszych działaniach, można na tę różnicę względu nie mieć, i równowágę pozorną za równowágę brać práwdziwą.

W odległości 900. łokci, albo 300 sążni, różnica ta nie dochodzi 1. cala.

Jakoż niech promień CA, wyráżá promień ziemi, liniiá AB. niech wyraża stycz- Táb. XXI. *Fig. 6.* ną do końca tego promienia prowadzoną, a bardzo małą względem niego. Niech BDCd wyráżá liniią, ciągnioną przez punkt B, i przez śrzodek ziemi, spotykaiącą iey powierzchnia w punktach: D. i t.d. Będzie $AB^2 = DB \times Bd$: a że liniiá BD iest bardzo mała względem linii Bd, będzie prawie $AB^2 = Dd \times BD$; a $BD = \frac{AB^2}{Dd}$.

Niechby AB, zawierała w sobie łokci 900, znaydziemy BD mnieyszą od $\frac{1}{24}$ części łokcia, toiest mnieyszą od cála.

Liniiá ta BD iest prawie proporcyonalną kwadratowi linii AB; a zatem w odległo-

ległościach, 2,3,4,5, i t. d. razy mnieyszych od 900. łokci, będzie, 4,9,16,25, i t. d. razy mnieyszą od cała.

366. Lubo nierówności na powierzchni ziemi, są bardzo małe względem wielkości cały ziemi a zatem można na nie względu nie mieć w niektórych okolicznościach; te iednak nierówności wiele się przykładaia do odmian, które na ziemi postrzegamy. Gdyby n p. ziemia była Matematyczną kulą, toiest zupełnie okrągłą; wody wszystkie na iey powierzchni znayduiące się byłyby stoiącemi; nie byłoby ani rzek, ani strumyków, ani zrzódeł wytryskuiących i sztuką tylko możnaby wody z iednego mieysca na inne sprowadzać.

367. Przez działania równoważenia, wyznaczaią się te nierówności, czyli różnica, która zachodzi między odległością od środka ziemi, dwóch albo więcey punktów. Przeto dochodzenie iakieykolwiek wysokości, możnaby sobie wystawić pod ogólnym tém wyobrażeniem działań równoważenia; zwyczaynie iednak działania te daley się nie rozciągaią, iak do wyznaczenia pomnieyszych wysokości, a szczególniey do sprowadzenia wód z iednego mieysca na drugie; co obszerniey zwykło się wykładać w Fizyce.

W działaniach równoważenia, używane są

są niektóre narzędzia, służące do wyznaczenia linii prostey ukazuiącey równowagę pozorną. Tych wszystkich narzędziów opisanie, wieleby tu mieysca zabrało, (m) wyrażą się iednak potrzebnieysze.

368. Równowága wodná, iedna z náyprościeyszych, składá się z rurki mosiężney, albo blaszaney, i z dwóch butelek szklanych iak náyprzezroczystszych, przy końcach teyże rurki przyprawionych: Woda w tych butelkach zawartá przechodzi przez rurkę, i w równey w obudwóch butelkach utrzymuie się wysokości. Osadzoná bywá taká równowága na nodze drewnianey, podobnie iak stolik mierniczy, albo kątomierz.

369. Używanie iey na tém się zasádzá, że woda przez otwarcie iakie łączące dwa lub więcey naczyniá, przechodząca z jednego do drugiego, układa się do równowagi. Z wielką iednak ostrożnością używać potrzeba, tey tu opisaney równowagi, gdy bez pomocy perspektyw, gołém

(m) Dokładné i obszérné opisanie tych narzędziów, znáyduie się w Xiążce P. Pikarda o równoważéniu; która z wielą przydatkami wyłożoná iest z Francuzkiégo na Niémiecki ięzyk przez P. Lamberta. Wielé także doczytać się możná w Xiążce napisaney w tey materyi przez P. Le Febure.

łém okiém do powiérzchni wody przyſtawionéṁ, celuiemy do iakiégo mieysca.

370. Układ równowági powietrzney zasadzá się na własności powietrza, iłé lekszégo od wody. Przez tę własność, powietrzé w rurce wráz z wodą zamknięté wychodzić nad wodę musi.

Jest to iedén z náylepszych sposobów do ustawiéniá, podług równowági, prawidła, albo raczéy perspektywy do niego przyprawioney.

Równowági powietrzné do wielkiéy doskonałości można przyprowadzić, iako to, opisuiąc równowagę Brandera, obszérnie wywodzi' P. Lambert w przydatkach swoich do Xiażki Pikarda. Robią ieszcze i równowági próżné to iest takié, z których powietrzé iest wyciągnioné.

Te równowági, za świadectwém X. Fontany, náymnieyszą nawet nierówność poznać daią.

371. Do wykiérowaniá linii, prawidła, lub perspektywy, podług położeniá poziémnégo, służy téż i nić, która przez cięźár w końcu iéy zawieszony do pionu się układá.

Ta nić ponieważ ieſt proſtopadłą do linii iakiéykolwiek poziémnéy, na téy więc

za-

zasadzie robić zwykli, innégo ieszcze gatunku równowági, nazwané rownowágami *Pikarda*, *Huyghensa* i t. d.

372. Do działáń równowáżéniá, potrzebny także ieſt pręt podzielony na łokcie, cále i t. d. na który wkłádá się znak z papiéru grubégo, lub inny podobny, mogący się posuwać wzdłuż pręta; a na śrzodku tego znaku má bydź cél wyrażony, któryby i z daleka rozeznać możná.

373. Niech będą dwa iakiékolwiek mieysca, których różność równowági trzeba znaléźć.

Poſtáwmy narzędzié, na iednéṁ z tych mieysc, a na drugiém pręt na łokcie, cale i t. d. podzielony. Perspektywę poziémnie, czyli do równowagi ustawioną kieruymy ku prętowi: do którégo znak przyprawiony, ma bydź przez inną osobę spuszczany, lub podnoszony póty, póki śrzodek tego znaku nie przypadnie w linii proſtey, którą poziemné perspektywy położenie wyznaczá. Jeżeli wysokość tego śrzodka znaku, od spodka pręta rachowaná, będzie równá wysokości perspektywy rachowaney od spodka nogi, na którey całé narzędzié z perspektywą ieſt wsparté; tedy dwa te mieysca będą do równowági. Jeżeli zaś wysokość śrzodka znaku będzie większá, lub mnieyszá od wysoko-

ści perspektywy; tedy spodek pręta będzie tyle niższy lub wyższy od spodku nogi narzędzia: ila iest różnica między temi dwiema wysokościami.

Tego sposobu równoważenia używać tylko można w odległościach na 100, a naywięcey na 200, sażni.

W większych odległościach, uchybienia byłyby znacznieysze, tak z przyczyny zboczenia światła łamiącego się w powietrzu, iako z niedokładności narzędzia, które w wiekszych odległościach większe też sprawuie uchybienie, a nakoniec i z przyczyny różnicy, zachodzącey między prawdziwą i pozorną równowagą.

374. Po części można się ustrzédz tych uchybień, a raczéy one zmnieyszyć, stawiaiąc narzędzie w równey, ile bydź może, odległości, między dwoma mieyscami, które równoważyć mamy. Obudwóch tych mieysc trzeba wyznaczyć równowagę względem tego śrzedniego stanowiska. Ponieważ zaś różnica wysokości śrzodka znaku na dwóch tych mieyscach postawionego, iest różnicą tychże mieysc wysokości, iedney względem drugiey; tą więc różnicą będzie wyższe od drugiego to mieysce, w którem znak niżey iest położony.

Przez

Przez to dwoiakié działanié możná z jednégo ſtanowiska równoważyć dwa iakié mieysca, których odległość zawiérałaby n p. 300. sążni, a zatem iużby nadto wielká była, aby się w niéy piérwszégo do równoważéniá sposobu użyć godziło.

375. Gdy mieysca do równoważéniá wyznaczoné, są ieszcze odlegleyszé, n p. na iedne, lub dwie mile dalekie, iedno od drugiégo, można tę przywiększą odległość podzielić na części, z których każdá zawiérałaby około 300. sążni: a dopiéro z pośrzodka każdéy téy mnieyszey odległości, równoważyć iéy końce, czyli granice.

Przez piérwszé takowé działánié, znáydziemy różnicę pierwszégo punktu wysokości od drugiégo następuiącégo. Przez drugié działanié znáydziémy różnicę wysokości tego drugiego punktu od trzeciégo, i tak daléy, aż na koniec znáydziémy różnicę wysokości przedostatniégo punktu od ostatniégo, który kończy całą odległość, a tém samém doydziémy téż i różnicy wysokości piérwszégo punktu od ostatniego, toiest, doydziémy różnicy wysokości między iednym i drugim końcem całey odległości.

376. Gdyby się zdarzyło, że postępuiąc od każdégo punktu podziáłu, do innégo iemu nayblizszégo, każdy taki

ki punkt następny byłby wyższy lub niższy od poprzedzaiącego, z którym się w równoważeniu porównywa: tedy summa różnic wysokości między iednym i drugim punktem następnym pokazałaby całą różnicę między wysokością dwoch punktów kończących całą odległość. Ale ieżeli té punkta następné, są na przemiany iedné wyższé, a drugié niższé względém tych, z którémi się przy każdém działaniu porównywaią; tedy wziąźć trzeba summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdém następném działaniu są wyższé od tych, z którémi ié porównywámy (postępuiąc zawsze od iednego końca całéy odległości, do drugiégo.) Trzeba ieszcze wziąźć i summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdém działaniu następném są niższé od tych, z którémi się porownywaią (w tę samę stronę co i piérwey postępuiąc:)

Jeżeli té dwie summy będą równé; znakiém to będzie, że obadwa całéy odległości końce są do równowági. Jeżeli zaś té dwie summy będą nie równé; tedy ostatni koniec odległości, tylé wyższy, lub niższy będzie od piérwszego, ile piérwszá summa większá lub mnieyszá iest od drugiéy.

377. Aby nie bydź obowiązanym porównywać przy każdém stanowisku, wyso-

sokości dwóch punktów przypádaiących do równowáženiá; lepiéy iest, że dway pomocnicy rachowáć będą wysokość znaku, i onę dlá pamięci zapisywać po każdém szczególnem działaniu. Jedna z tych wysokosci naznaczonych, będzie służyć do porównaniá iéy z jnną następną, która ieszcze nie iest znaleziona. Ci dway pomocnicy postępować będą po każdém szczególném działaniu, ku drugiemu końcowi całéy odległości; ten, który wprzody póydzie, stanie przy następuiącym punkcie podziału, á drugi ftanie przy punkcie od pierwszégo opuszczonym.

Po skończonych tych wszystkich szczególnych działaniach, zbierze się wráz summa wysokości od pierwszégo pomocnika naznaczonych, i podobnie w jednę summę zbiorą się wysokości naznaczoné od drugiégo pomocnika. Różnica tych dwóch summ, będzie różnicą wysokości dwóch punktów skraynych, któréśmy równoważyć postanowili. Tén zaś punkt będzie wyższy od drugiégo, któremu odpowiadaiącá summa będzie mnieyszá.

378. Co się tycze równowáženiá mieysc położonych w Kraiach bardzo odległych; iak n. p. gdyby trzeba wyznaczyć różnicę wysokości mieysc położonych przy brzegach morza śrzódziémnego, od wysokosci mieysc innych w srzód Polski po-

łożonych, albo przy brzegach morza Baltyckiego; rozumiem że pewnie o tem mowa będzie w Fizyce. Można w téy mierze czytać między innémi Dzieło wielkié P. De Luc. o różnych umiarkowaniach powietrzni otaczaiącéy ziémię (sur les modifications de l' Atmosphere.)

ROZDZIÁŁ XIII.

O kwadrowaniu koła, czyli o wynaleziéniu Powiérzchni Koła.

379. Obwody Wielokątów forémnych podobnych sobie, tak się do siebie maią, iak promiénie kół w nie wpisanych, lub na nich opisanych. Powiérzchnie tychże Wielokątów, równaią się Tróykatóm maiącym za wysokość promiénie kół wpisanych, a za podstawę obwód Wielokątów. Też powierzchnie Wielokątów forémnych podobnych do siebie, tak się maią do siebie, iak kwadraty promiéni kół wpisanych, i t. d. Wszystkié té Twiérdzenia nie zawisły od liczby boków w Wielokątach, i zawsze są práwdziwé, chociażby náywiększá była liczba boków.

380. Stąd zdaie się, że práwdziwé będą té wszystkié Twiérdzéniá, gdyby nawet liczba boków tak wielká była w wielokątach, żeby ich od kół rozeznać nie podobná, i gdyby promiénie

kół

kół wpisanych i opisanych różnicy między sobą nie miały, ale się iednym promieniem wydáwały. (n)

381. *Twierdzenie przybrane.* Možná zawsze chociáž myślą podzielić ilość iaką na tyle części równych, aby každá ta część w szczególności mnieysza była, niželi inná iakakolwiek ilość naznaczoná.

(n) Takowé rozumowanie; przywiodło Geometrów, že do koła uwážanégo za granicę między wielokątém wpisanym i opisanym, przystósowali té Twiérdzéniá, które o wiélokątach stanowili. Dosyć podobno będzie przy piérwszém czytaniu téy Xiążki wystawić Uczniom koła, pod tą postacią. Ježeli iednak przez ćwiczéniá poprzedzaiące, ducha dokładności i smaku w niéy nabyli, przeciwną rzeczą zapewné zdáwać im się będzie, przechodzić od wielokąta, choćby z naywiększą liczbą boków, do koła uwážanégo pod postacią wielokąta takiégo, którégo liczba boków większá byłaby od iakiéykolwiek liczby naznaczonéy. Postrzegą oni, i postrzédz powinni skok niezmierny w takowém przechodzéniu: gdyž ściśle mówiąc: liniiá krzywá nię može bydź uwážaná, iako zbiór wielu liniy prostych bardzo małych, do siebie nachylonych. Należy przeto rzecz tę z większą dokładnością wyłuszczyć tak dlá zabieženiá wielu trudnościóm, które w téy mierze zarzucać zwykli niektórzy o świetle rozumu swégo i przeniknieniu nadto uprzedzéni, a ledwie w rzeczy samiéy piérwszé Matematyki początki znaiący, iako-též i dlá wprawiéniá młodzi zawczasu w dokładność Matematyczną.

Dowodz: Pomnóżmy tę drugą ilość naznaczoną, tyle razy, ile potrzeba, aby się stała większą od pierwszey ilości daney; na tyleż części równych podzielmy ilość piérwszą, ilé razy była pomnożoná ilość druga: każdá takowa część ilości piérwszey, mnieysza będzie od ilości drugiey naznaczonéy.

W szczególności mowiac, gdy się weźmie połowa ilości iakiey skończonéy, i téy połowy połowa, toiest czwártá część całéy ilości, i znowu tey ostatniey połowy połowa, toiest osma część całéy ilości: daléy połowa tey osmey części, toiest, część szesnástá i t. d; doydzie się na ostatek do takiéy części, którá mnieyszą będzie od wszelkiéy ilości naznaczoney. (o)

382. *Twiérdzenié* 1. Możná opisać na kole danem i wpisać weń foremné dwa tekié wielokąty podobné, aby stósunek ich obwodów przybliżał się bardziéy do stósunku równości, niżeli iakikolwiek inny stósunek nierówności naznaczony.

Przy-

(o) Przestrzegać będą Nauczyciele Uczniow; aby zamiast słowa: *naznaczoná*, nie używali tego drugiégo słowa *naznaczyć się mogącá*, i dadzą im poznać różnicę tych dwóch wyrazów.

Przykład. Można wpisać w koło i na niem opisać dwa wielokąty forémné podobné, takié, którychby rożnica obwodów mnieyszá była od dziesiątéy na przykład części obwodu, iednégo z nich.

Niech będzie CA promień koła, podzielony na dziesięć części równych, i niech AB iednę taką część wyrázá. Tab.XXII Fig. 1.

Przez B przeciągniymy DBd. prostopadłą do promieniá, i spotykaiącą okrąg koła w punktach D, i d. Podzielmy okrąg koła, na 2, 4, 8, 16. i t. d. części równych, póty, póki nie doydziemy do części koła mnieyszéy od łuku DAd. Niechby na przykład łuk EAe był iedną z tych części mnieyszych od łuku DAd: i punkt A, niechby go dzielił na dwie części równé EA, Ae. Pociągniymy liniią Ee, (która będzie prostopadłą do AC). Przez punkt A niech przechodzi styczná FAf, i niecháy dwa promienie CE, Ce, schodzą się z tą styczną w punktach F, f. Liniie Ee, Ff, są bokami dwóch wielokątów forémnych podobnych, iednégo w koło wpisanégo, a drugiégo na kole opisanégo; a zatém obwody tych dwóch wielokątów będą, iak boki Ee, Ff, albo iak liniie CG, CA. Więc różnica obwodów tych dwóch wielokątów, będzie do obwodu większégo wielokąta, iak liniiá AG, do linii CA. A że liniiá AG mnieyszá iest od linii AB, to-

iest

iest od dziesiątéy części linii CA; więc i różnica dwóch obwodów mnieyszá będzie, niżeli dziesiątá część obwodu wielokąta na kole opisanégo.

Gdyby liniiá AB była $\frac{3}{11}$ linii BC, albo $\frac{3}{11}$ linii AC, możnáby podobnym sposobem dowieśdź, że różnica dwóch obwodów, tak się má do obwodu wielokąta w koło wpisanégo: iak liniiá AG do linii CG. A że AG mnięyszá iest od AB: więc tém samém mnieyszá iest od $\frac{1}{10}$ téy części linii BC, a tém bardziéy mnieyszá będzie od 10téy części linii CG. Różnica tedy między dwoma obwodami wielokątów mnieyszá byłaby od 10téy części obwodu wielokąta w koło wpisanégo. (p)

383. *Wniosek* 1. Możná w koło wpisać wielokąt ieden forémny, i drugi podobny na nim opisać, tak aby ſtósunek obwodu koła do obwodu iednégo z dwóch wielokątów bardziéy był przybliżony do ſtó-

---

(p) Daie się tu przykłád liczebny dlá łatwieyszégo poięciá. Że iednak té rozumowaniá uważané w sobie nie zawisły od tych liczb, i mogą bydź przystósowané do wszystkich innych; przeto dowodzénié naszé nie iest dlá tego szczególnégo przystósowaniá, ani mniéy dokładném, ani mniéy ogólném.

ſtósunku równości, niżeli iakikolwiek inny ſtósunek naznaczony.

Przykład. Niechby opisany na kole był ieden wielokąt, a drugi podobny w koło wpisany, i niechby różnica ich obwodów mnieyszá była od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanégo.

Różnica obwodu wielokąta opisanégo, od obwodu koła mnieyszá będzie niż różnica obwodu tegoż wielokąta od obwodu wielokąta wpisanégo; toiest, mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$ część obudwu wielokąta wpisanégo, a tém bardziéy mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

Różnica także obwodu koła od obwodu wielokąta wpisanego mnieyszá iest, niżeli różnica między obwodami dwóch wielokątów, a zatém mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanégo, a dopiéróż mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

384. *Wniosek* 2. Maiąc daną liniią proſtą, wziętą za równą okręgowi koła danégo, wpisać w to koło, i opisać na nim wielokąty, których obwodów różnica od obwodu koła mnieyszá byłaby, niżeli liniiá daná iakiéykolwiek małości.

Po-

Pomnóżmy ostatnią tę liniią tylérazy, aż większą będzie od linii wziętéy za równą okręgowi koła. Niechby naprzykład 10. razy powiększoná była ta liniiá. Wpiszmy w koło i opiszmy ná niém dwa wielokąty forémne podobné, którychby różnica obwodów mnieyszá była od $\frac{1}{10}$ części obwodu iednégo z nich. Będzie zatém różnica obwodu koła od obwodu którégokolwiek z tych dwóch wielokątów mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$ ta część obwodu, iednégo z tychże wielokątów, naprzykład obwodu wielokąta wpisanégo; a dopiéróż mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$. ta część okręgu koła, a ieszcze mnieyszá, niż liniiá daná wyznaczonéy małości.

385. *Twiérdz:* 2. Okręgi kół tak się maią do siebie, iak ich promiénie.

Niech będą dwa koła C i c, a tych okręgi O i o, promiénie zaś P i p; będzie zatém O: o = P: p.

Gdyby ta proporcyá w czém chybiała; tedy piérwszy stósunek byłby większy lub mnieyszy od drugiégo. W piérwszym razie trzebaby powiększyć okrąg o, a w drugim okrąg O, aby naprawić proporcyą; a zatém w obydwóch razach trzeba powiększyć ieden z okręgów dlá zrobiénia proporcyi.

Niech-

Niechby liniiá prosta L większá była od okręgu O, i niechby było (ieżeli podobná) L: o = P: p.

Opiszmy na kole C wielokąt forémny, któregoby różnica obwodu, od obwodu koła, mnieysza była, niżeli różnica L od O. Na drugiem także kole c, opiszmy wielokąt forémny podobny pierwszemu. Obwody tych dwóch wielokątów tak się miec będą do siebie, iak promiénie P. i p, kół C i c; albo iak L do o, (poniewaź miało bydź L: o = P, p.) A że obwód piérwszego wielokąta, mnieyszy iest niżeli L; więc i obwód drugiego, mnieyszyby bydź powinién niżeli o, toiest mnieyszy niżeli okrąg koła, na którym iest opisany: co bydź nie może.

Więc stósunek promiéni dwóch kół, nie iest większy ani mnieyszy do stosunku ich okręgów: a zatém równy iest témuż stósunkowi.

386. *Wniosek* 1. Jdzie zatém, że stósunek okręgu koła iednégo, do swego promiénia tenże sam iest, co i stósunek którégokolwiek innégo koła, do swégo także promiénia.

Przeto gdyby možná znaléźć stósunek iakiegokolwiek koła, do iego promiénia, iuż tem samém byłby znaleziony stósunek każdego innégo koła do swégo promiénia.

387.

387. *Wniosek* 2. Dwa prostokątné Tróykąty są do siebie podobné, gdy maią za wysokości, promiénie dwóch kół, a za podstawy liniie wzięté za równé okręgóm tychże kół: a zatém takié dwa Tróykąty będą do siebie w stósunku dwumnożnym ich boków, naprzykład promiéni dwóch kół.

388. *Twiérdz.* 3. Powiérzchniá koła równá się powiérzchni Tróykąta, maiącégo za wysokość promiéń tego koła, a za podstawę, iego okrąg.

Dowodz. Gdyby tén Tróykąt nie był równy powiérzchni koła; byłby od niey większy, albo mnieyszy: a zatém koło byłoby równé innému Tróykątowi téyże saméy wysokości, za podstawę zaś maiącému liniią większ ą, albo mnieyszą od okręgu koła.

Nazwiymy okrąg koła, O. a tę liniią, większą albo mnieyszą od okręgu nazwiymy L.

W piérwszym razie, w którym ta liniiá L, większá byłaby od okręgu koła, opiszmy na nim wielokąt forémny, którégo obwod mnieyby się różnił od okręgu koła, niżeli się różni od niego liniiá L: a zatém liniiá L, większáby była od obwodu wielokąta. Powiérzchniá tego wielokąta byłaby mnieyszá od powiérzchni Tróy-

kąta

kąta maiącego za wysokość promień koła, a za podstawę, liniią L, toiest byłaby taż powiérzchnia wielokąta, mnieyszá od powiérzchni koła, na którém wielokąt iest opisany; co bydź nie może.

W drugim razie, w którym liniiá L, mnieyszá byłaby; od okręgu koła, wpiszmy w koło wielokąt foremny, którego obwód mniéyby się różnił od okręgu koła, niżeli liniiá L, a zatém obwód wielokąta byłby większy od linii L. Wpiszmy w to samo koło wielokąt inny forémny, tylé dwoie, co piérwszy boków zawieraiący.

Powiérzchniá tego drugiégo wielokąta, równałaby się Tróykątowi, maiącemu za wysokość promień koła, a za podstawę obwód piérwszégo wielokąta: (268) toiest liniią większą od L.

A zatém powiérzchniá tego wielokąta wpisanego w koło, większá byłaby niżeli powiérzchniá koła: co bydź także nié może.

Więc powiérzchniá koła, ani iest większá, ani mnieysza od powiérzchni Tróykąta maiącégo za wysokość promień tego koła, a za podstawę iego okrąg; a zatém równá iest powiérzchni tego Tróykąta.

389.

389. *Wniosek* 1. Powiérzchnie kół są do siebie w stósunku dwumnożnym ich promiéni, albo śrzednic: przeto, gdyby promiénie kół były iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. powiérzchnie tychże kół byłyby iak kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25 i t.d.

390. *Wniosek* 2. Powiérzchniá koła, tak się má do powiérzchni wielokąta na nim opisanego; iak okrąg koła do obwodu wielokąta. A w szczególności powierzchniá koła, tak się má do powiérzchni kwadratu na nim opisanégo, albo, co na iedno wychodzi, do kwadratu śrzednicy, iak się má okrąg koła do obwodu tego kwadratu: toiest, iak się má okrąg koła, do swoiéy śrzednicy cztéry razy wziętéy, czyli do linii tak długiéy, iak cztery śrzednice.

Stąd porownanié dokładné powiérzchni koła, z powiérzchnią kwadratu, a zatém i porównanié koła z powiérzchnią zaiakiéykolwiek figury prostokréślnéy, zawisło od porównaniá okręgu koła z liniią iaką prostą: albo, (co na iedno wychodzi) *kwadrowanié* koła, zawislo od *wyprostowaniá* iego okręgu, czyli od wynaleziéniá linii prostéy rownéy okręgowi koła.

391. *Wniosek* 3. Wszystkié sposoby postępowaniá, którè się wyżéy podáwały, do zrobiéniá kwadratu równégo sum-

summie, albo różnicy dwóch innych kwadratów danych, końcem powiększénia lub zmnieyszénia kwadratu w danym stósunku, mogą bydź równie i do kół przystósowané, czyniąc na ich promiéniach lub śrzednicach, té samé działania, któréby się na nich czyniły, gdyby były bokami kwadratów, na którychby podobné odmiany czynić przypadało.

A w szczególności, chcąc podzielić powiérzchnią koła danego, na pewną liczbę części równych, przez *koła spółśrzodkowé* (circuli concentrici); trzeba podzielić promień iego na tyléż części równych, zacząwszy od śrzodka, tak, aby odległości punktów podziału coráz dalszych od tegoż śrzodka, były do siebie iak kwadraty liczb następnych 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. Niechby n. p. przypádało podzielić koło na 7. części równych przez koła spółśrzodkowé. Podzielmy promień na 7. części równych: śrzednie Geometryczné między odległościami punktów podziáłu od śrzodka, i całym promiéniem, będą promiéniami kół spółśrzodkowych, przez które podzieloná będzie powiérzchnia koła danégo, na 7. części równych.

392. Wyznaczénié powiérzchni wycinków, i odcinków kół, zawisło także od wyznaczenia okręgu koła. Jakoż w samey rzeczy.

1. Powiérzchniá wycinka tak się má do powierzchni koła, do którego tén wycinek należy: iak się má łuk wycinka, do okręgu koła: toiest, iak się má Tróykąt, którégo wysokością iest promień a podstawą ten łuk, do Tróykąta maiącégo za wysokość ténże promień, a za podstawę okrąg koła. A że tén ostatni Tróykąt byłby równy powiérzchni koła; więc i piérwszy Tróykąt ró-wny iest powiérzchni wycinka.

2. Odcinek mnieyszy od półkola, ieſt różnicą między wycinkiém maiącym ténże sám łuk, co i odcinek, i między Tróykątém równoramiénnym, maiącym spólną z wycinkiém podstawę, wiérzchołek zaś w śrzodku koła.

A że powiérzchniá wycinka, równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość promień, a za podstawę łuk wycinka: a powiérzchniá Tróykąta, o którym mowa (wziąwszy w nim za podstawę iedén z promiéni, toiest z ramión iego, a za wysokość wstawę łuku, należącégo do wycinka), równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość promień, a za podstawę wstawę łuku; więc powiérzchniá odcinka mnieyszégo od półkola równać się będzie Tróykątowi maiącému za wysokość promień, a za podstawę różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku. Arytmetycznie ta powiérzchniá wy-

wyráżá się rozmnożéniém liczby oznáczaiącéy połowę promiénia, przez inną liczbę oznáczaiącą różnicą łuku wycinka od wstawy tegoż łuku.

Powiérzchniá odcinka większégo od półkola, iest summą z wycinka zawiéraiącego między swémi ramionami tén sám łuk, większy od półkola, i Tróykąta, w którym, wziąwszy za podstawę promiéń, wysokością byłaby wstawa łuku czyniącego z łukiém piérwszym okrąg cały: a zatem powiérzchniá tego odcinka, równá się Tróykątowi maiącému za wysokość promiéń, a za podstawę summę z łuku odcinka tego, i z wstawy łuku, który spełniéniem iest piérwszégo łuku do całégo okręgu, albo, (co na iedno wychodzi), z wstawy różnicy między łukiém odcinka, i półokręgiém.

393. *Defin*: W kołach nieiednakowégo promiénia, wycinki i odcinki podobné, té są, których łuki są do siebie podobné, toiest, równą stopniów liczbę w sobie zamykaią: a té łuki tak się maią do siebie, iak całé okręgi, a zatém iak promiénie tychże kół.

394. *Twiérdz*: 4. Wycinki i odcinki podobné w kołach nie iednakowégo promiénia, tak się maią do siebie; iak kòła, do których należą.

1.

Táb. XXII. Fig. 2. 1. Niech będą dwa wycinki podobné ABCDA, abcda, té dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą.

Dowodz: Wycinek ACBDA, tak się má do koła, do którégo należy; iak łuk ADB, do okręgu ADBEA, albo (393) iak łuk adb, do okręgu adbda, toiest, iak wycinek acbda, do koła, do którégo należy. Więc té dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą, toiest w stósunku dwumnożnym promieni tychże kół.

Niech będą dwa odcinki: ABDA, abda, podobné, té dwa odcinki tak się maią do siebie, iak koła, do których należą.

Dowodz: Wycinki ACBDA, acbda, maia się do siebie w stósunku dwumnożnym promieni CA, ca; toiest, iak CA^2, do ca^2. Tróykąty podobné: ACBA, acba, w tymże samym iedén do drugiégo są stósunku; więc té dwa wycinki ténże sam do siebie maią stósunek, co i té dwa Tróykąty. Więc różnica (albo summa) piérwszégo wycinka, i piérwszégo Tróykąta, toiest odcinek ABDA, tak się má do różnicy (albo do summy) drugiégo wycinka i drugiégo Tróykąta, toiest do odcinka abda, iak się má piérwszy wycinek do drugiégo: toiest, w stósun-

sunku dwumnożnym promieni kół, do których té odcinki należą.

395. *Defin:* Niech będą dwa koła spółśrzodkowe, mieysce zawarte między ich okręgami, nazywá się *Koroną.*

396. *Twiérdz:* 5. Powiérzchnia iednéy takiey korony równa iest prostokatowi maiacému wysokość równą szérokości téy korony, a podstawę równą okręgowi koła, którego promień równałby się połowie summy promieni okręgów dwóch, koronę tę zawieraiących.

Niech będą CA, CB, promiénie dwóch kół spółśrzodkowych; przedzielmy AB na dwie równé części w F: liniiá CF, będzie połowa summy dwóch promieni CA, CB należących do dwóch kół spółśrzodkowych: korona zawartá między témi kołami, równá iest prostokątowi maiacému szérokość AB téy korony za wysokość, a za podstawę okrąg, którégo liniia CF byłaby promieniem. Poprowadźmy AD prostopadłą do AC, i daymy, że AD równá się okręgowi którego promiéniém iest CA. Złączmy punkta C, i D, liniią CD, a przez punkta B i F, pociągnijmy dwie linije równoodległé od AD, aż do ich spotkaniá się z liniią CD, w punktach E, i G. Tab. XXII. Fig. 3.

Ponieważ CA: CB=AD: BE
i CA: CB=okrąg CA:okręguCB.
więc - AD: BE=okrąg CA:okręguCB.

A że AD wziętá iest za liniią równą

okręgowi, którégo CA iest promieniém; więc i BE=okręgowi CB.

Podobnym sposobém dowieść można, że liniiá FG, równá iest okręgowi, którégo promieniém byłaby liniiá CF.

Powierzchnie kół, których promieniami są CA, i CB, równaią się Tróykątóm, CAD, i CBE; a zatém powierzchniá korony równá będzie czworokątowi ABED. Przez G poprowádźmy równoodległą od AB, któráby spotkała AD w H, a BE w J; Tróykąty prostokątné GDH, GEJ, maią boki GH, GJ równé, i kąty równé, więc mogą przystać do siebie: a zatém summa z Piąciokąta BEGHA, i z Tróykąta GEI, toiest Prostokąt ABIH równá się summie z Piąciokąta BEGHA, i z Tróykąta GDH, toiest, równá się czworokątowi BEDA. A że tén czworokąt równy iest powierzchni korony; więc taż korona równa będzie prostokątowi ABIH, toiest prostokątowi, który má szérokość korony za wysokość, a za podstawę okrąg, w którym promieniém iest śrzedniá arytmetycznie proporcyonalná, między dwoma promieniami, czyli połowa summy tychże dwóch promieni.

397. Podobnie i różnica w kołach spółśrzodkowych, wycinków dwóch, zawartych między témiż samémi promieniami, równá się Prostokątowi maiącému za wysokość różnicę dwóch promieni, a za podstąwę łuk podobny łukóm wycinków

dwóch

dwóch danych, i należący do okręgu, któré-go promién, iest śrzednim arytmetycznym między promieniami tych dwóch wycinków.

1. Pokázáwszy, iż skwadrowanié koła, lub części iego, zawisło od wyprostowania iego okręgu; przystąpmy do szukaniá tego sprostowaniá.

Żadanié to, aż nazbyt wsławioné, zatrudniło wielu przypisuiących sobie nazwisko Geometrów, którym ledwię początki Matematyki były znaiomé, a i zadania nawet samego nie rozumieli. W czem było omylné ich rozumiénié; bawić się nad tém, nie sądzę bydź rzeczą potrzebną. Mogą Nauczyciele, chcący mieć obszérnieyszą w téy mierze wiadomość, czytac Montukli przemowę do *Historyi o dochodzeniu kwadrowania koła* (Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle:) Dosyć będzie powiedzieć, że treść tego zadaniá na tém zawisła, aby wynaléźć liniią prostą równą okręgowi koła podanego. Nie rozumie się tu zas równość pozorná, i zmysłowá (iak ci mniemaią, którzy koło z drewna lub z kruszcu wyrobioné tocząc po iakiéy płaszczyznie, mierzą długość linii, którą punkt ieden tego koła przebiegł; albo, którzy koło iakié nicią okręcaią, i biorą potem długość téy nici, albo na koniec, którzy ważą takowé koło, i oné porównywaią z kwadratém podobnéy materyi i iednakowey z kołem grubosci: ale się rozumié

ró-

równość umysłowá, czyli taká, o którey możnáby się przeświádczyć przez rozumowániá podobné tym, iakich używaliśmy do dowiedzéniá práwd, w tym przeciągu dzieła, wyłuszczonych.

398. Archimedes trzysta lát blizko przed Narodzeniém Chrystusa, znalázł stósunek okręgu do śrzednicy, tak blizki práwdziwému, że we zwyczaynych zdarzéniach iest dostatecznym, a przytem, i w używaniu wygodnym. Doszedł on, że oznaczywszy śrzednicę kółá przez 1. Okrąg iego większy będzie niż $3\frac{10}{71}$, a mnieyszy niż $3\frac{10}{70}$ albo, że wyraziwszy długość śrzednicy przez 497. okrąg będzie większy niż 1561, a mnieyszy niż 1562; uchybiénié zatém byłoby náywięcey w części $\frac{1}{1561}$ całégo okręgu; a którégokolwiek ze dwóch stósunków używszy, n. p. ostatniego, ten wypádłby na stósunek 7 do 22.

Poźniéy po Archimedesie, wynaleziono ſposoby krótszé, którémi dochodzi się stósunków bardziéy ieszcze zbliżonych do práwdziwych. Do téy nawet dokładności iuż przyszło, że wyraziwszy śrzednice koła przez 1, z zerami 127 przydanémi, wynaydzie się okrąg w liczbie złożonéy z tyluż znaków liczebnych, z uchybiéniém mnieyszem od iedności ostatniégo, a naymniéy wyrażaiącégo znaku téyże liczby. Sposób iednak dochodzéniá z tą dokładnością ważności okręgu koła,

nié

nié możé bydź w tych początkach Uczniόm wykładany. Przytoczymy iednak stósunki niektóré wygodnieyszé śrzednicy koła do okręgu, wyięte z Xięgi sławnego *P. Huyghens* o wynalazkach wielkości koła (*de circuli magnitudine inventa.*) Używaiąc Dwunastokąta wpisanégo w koło, i na kole opisanégo, można wynaleźć dokładnieyszé stósunki śrzednicy koła do okręgu, niżeli té których doszedł *Archimedes* przez wielokąty o 96 bokach, wpisané w koło, i na nim opisané; ale na to mieyscé rachunek *Archimedesa* mniéy wyciąga poprzedzaiących podań, niżeli rachunek na dwunastokącie czyniony.

399. Stósunki śrzednicy do okręgu koła przybliżoné do prawdziwych są następuiącé.

7	do	22.
100	do	314.
106	do	333.
113	do	355. (q)

Ponieważ stósunek powiérzchni koła, do kwadratu śrzednicy iego, ten sam iest, co stósunek okręgu koła do śrzednicy cztery razy wziętéy; więc stósunki powiérzchni koła do kwadratu śrzednicy będą następuiącé.

(q) Napisáwszy trzy piérwszé nieparzysté liczby 1.3.5. po dwa razy, iedne przy drugiéy, tak: 113355 liczba 113, zawieraiącá trzy piérwszé znaki, wyrażać będzie śrzednicę; liczba zaś 355. zawiéraiącá trzy ostatnié znaki, wyrazi z małém uchybiéniém okrąg koła.

22 do 28, albo, 11, do 14.
314 do 400, albo, 157, do 200.
333 do 424.
355 do 452

Czyniąc przybliżéniá dokładnieyszé, lecz bardziéy zawiłé, i używaiąc sposobów krótszych, ale początkowe wiadomości przechodzących, znaleziono, iż okrąg koła záwiérá w sobie śrzednicę, razy 3,141 592 653 $\frac{5}{6}\pm$

Skąd wyniká stósunek powiérzchni koła, do kwadratu śrzednicy, albo stósunek okręgu koła do śrzednicy iego, cztéry razy wziętéy, równy stósunkowi 3,145 926 53 $\frac{5}{6}\pm$ do 4, albo 3 141 592 653 $\frac{5}{6}\pm$ do 4 000 000 000 0.

Z cztérech po wyżéy wyrażonych stósunków śrzednicy do okręgu koła; piérwszy daie okrąg koła większy razy

	3,142 8 + od śrzednicy,
drugi	3,140 0.
trzeci	3,141 509, +
czwárty	3,141 529 92 +

Widzimy tu, iż stósunek piérwszy, daie okrąg koła nad to wielki, drugi i trzeci daie ten okręg nadto mały, a czwárty, znowu nadto wielki; trzeci iednak i czwárty stósunek dokładnieyszy iest od dwóch piérwszych, a zwłászcza czwárty, który ieszcze w miliionowych cząstkach daie okrąg koła nie rożniący się od ważności

żności iego wyżéy podanéy (r) a iak náyściśléy wyrachowanéy.

400. Z tego co poprzedzało, łatwo iest rozwiązać przez przybliżénié, następuiącé zagádniéniá.

1. Maiąc daną śrzednicę koła, znaléźć iego okrąg.
2. Maiąc dany okrąg koła, znaléźć iego śrzednicę.
3. Maiąc daną śrzednicę koła, znaléźć iego powiérzchnią.
4. Maiąc daną powiérzchnią koła, znaléźć iego śrzednicę.
5. Znaléźć bok kwadratu równégo kołu danému.

Znáyduiémy, iż stósunek śrzednicy koła do boku kwadratu równégo tému kołu, iest, 200000, do $177245\frac{5}{6}\pm$

Tén stósunek przybliżá się bardzo do stósunków następuiacych - - - - - - - - - 35 do 31.
44 do 39.
123 do 109.
157 do 148. 6.

(r) W drugiéy Xiędze *Pamiętników* (Memoires) Matematycznych P. Lamberta, znáyduie się wyborná *Rozprawa* (*Dissertatio*) o kwadrowaniu koła. Dowodzi tam (§. 9.) Autor, że ieżeli możnáby wyznaczyć stósunek dokładny, okręgu koła do śrzednicy iego, tedy liczby, któréby go wyrážały, większéby bydź powinny od następuiących, które tén stósunek przybliżony wyrážaią, toiest: 101 951 448 609 9146. do 324 511 540 032 945.

6. Maiąc dany promień koła, i wáżność kątową łuku, (toiest w stópniach) znaléźć długość tego łuku, i powierzchnią wycinka, proporcyonalną temu łukowi.

7. Maiąc dany promień koła, i wáżność kątową łuku, znaléźć odcinek między tym łukiém i cięciwą iego.

Nayłatwiey i nayprościey rozwiążémy to ostatnié zagadnienie, gdy w Tróykącie, który iest różnica między wycinkiém i odcinkiém wspieraiącym się na tymże samym łuku, weźmiemy za podstawę ieden z promieni, a za wysokość wstawę łuku danego: mamy albowiem tę proporcyą, że powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni odcinka (mnieyszégo od półkola) iak się ma okrąg cały do różnicy między łukiem odcinka, i wstawą tego koła; i ułożywszy sobie táblicę łuku, podług promienia táblic Trygonometrycznych, łatwo przyydzie rozwiązać to zagadnienie. (s)

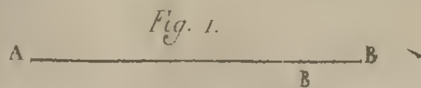
8. Znaleźć przez przybliżénié wáżność katową łuku równaiącego się promieniowi koła.

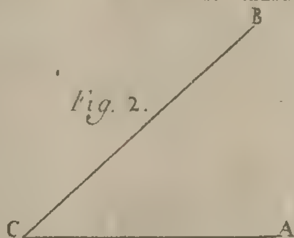
Przystósowanié tego zagádniéniá często bywá używané w wyższych częściach Matematyki.

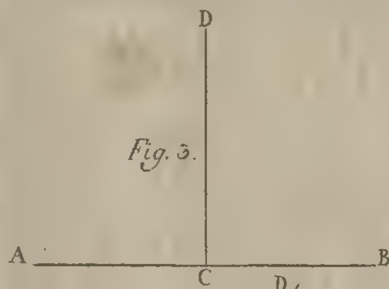
(s) Co się tycze sposobu ułożéniá takowych táblic, obácz przykłady dané w Arytmetyce.

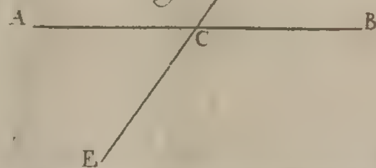


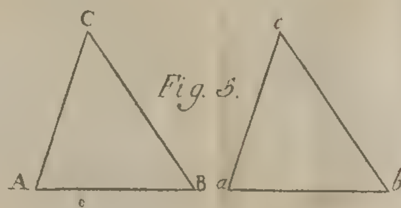
Tab. I.

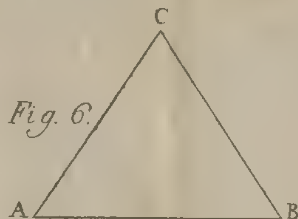

Fig. 1.
A
B

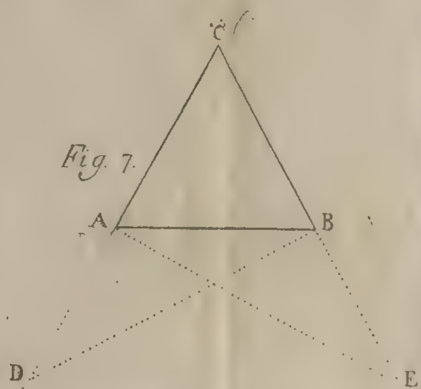

B
Fig. 2.
C
A


D
Fig. 3.
A
C
B

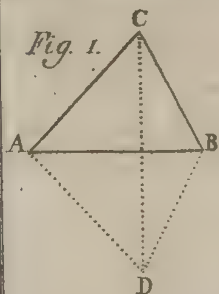

D
Fig. 4.
A
C
B
E

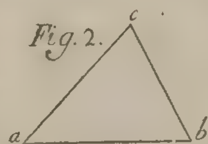

C
c
Fig. 5.
A
B
a
b

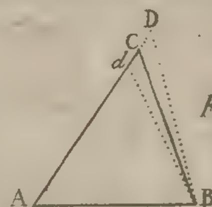

C
Fig. 6.
A
B

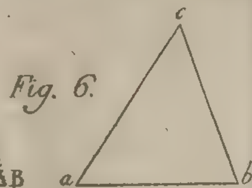

C
Fig. 7.
A
B
D
E

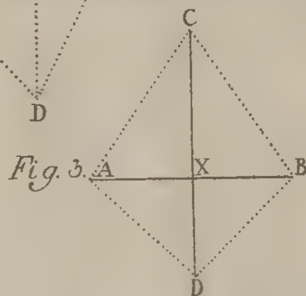
Tab. II.

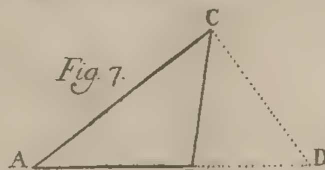

Fig. 1.
C
A
B
D

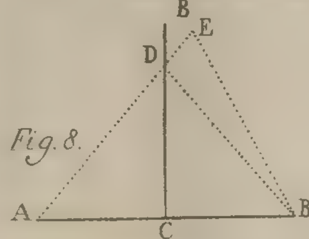

Fig. 2.
c
a
b

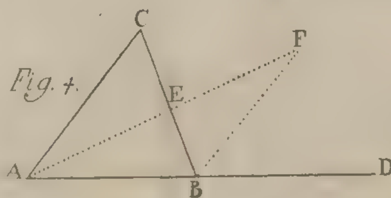

D
C
d
A
B

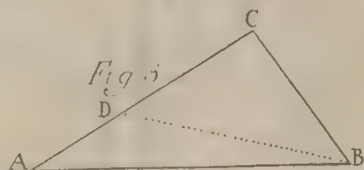

Fig. 6.
c
a
b

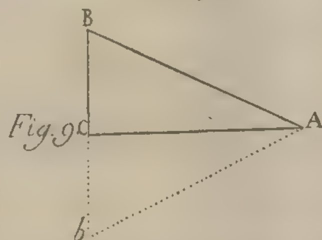

C
Fig. 3.
A
X
B
D

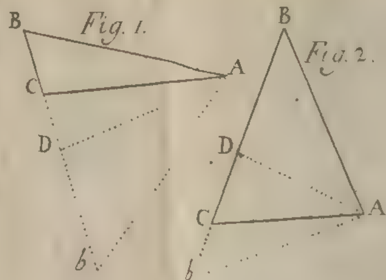

C
Fig. 7.
A
B
D

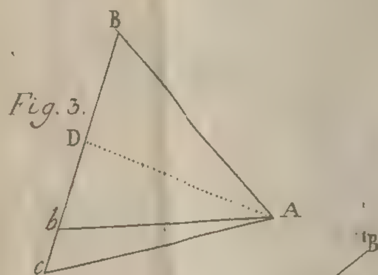

E
D
Fig. 8.
A
C
B

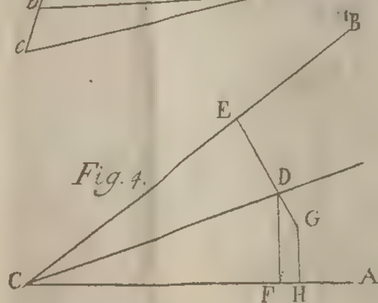

C
F
Fig. 4.
E
A
B
D

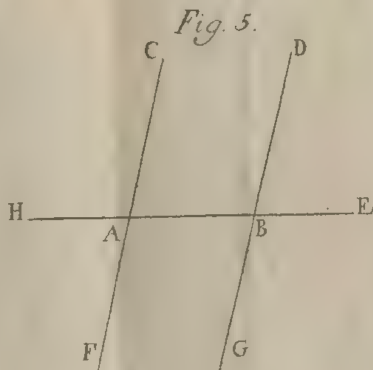

C
D
A
B

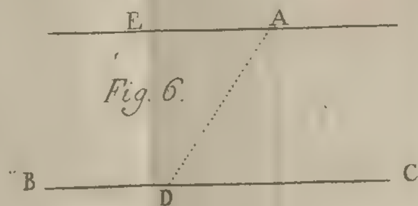

B
Fig. 9
C
A
b

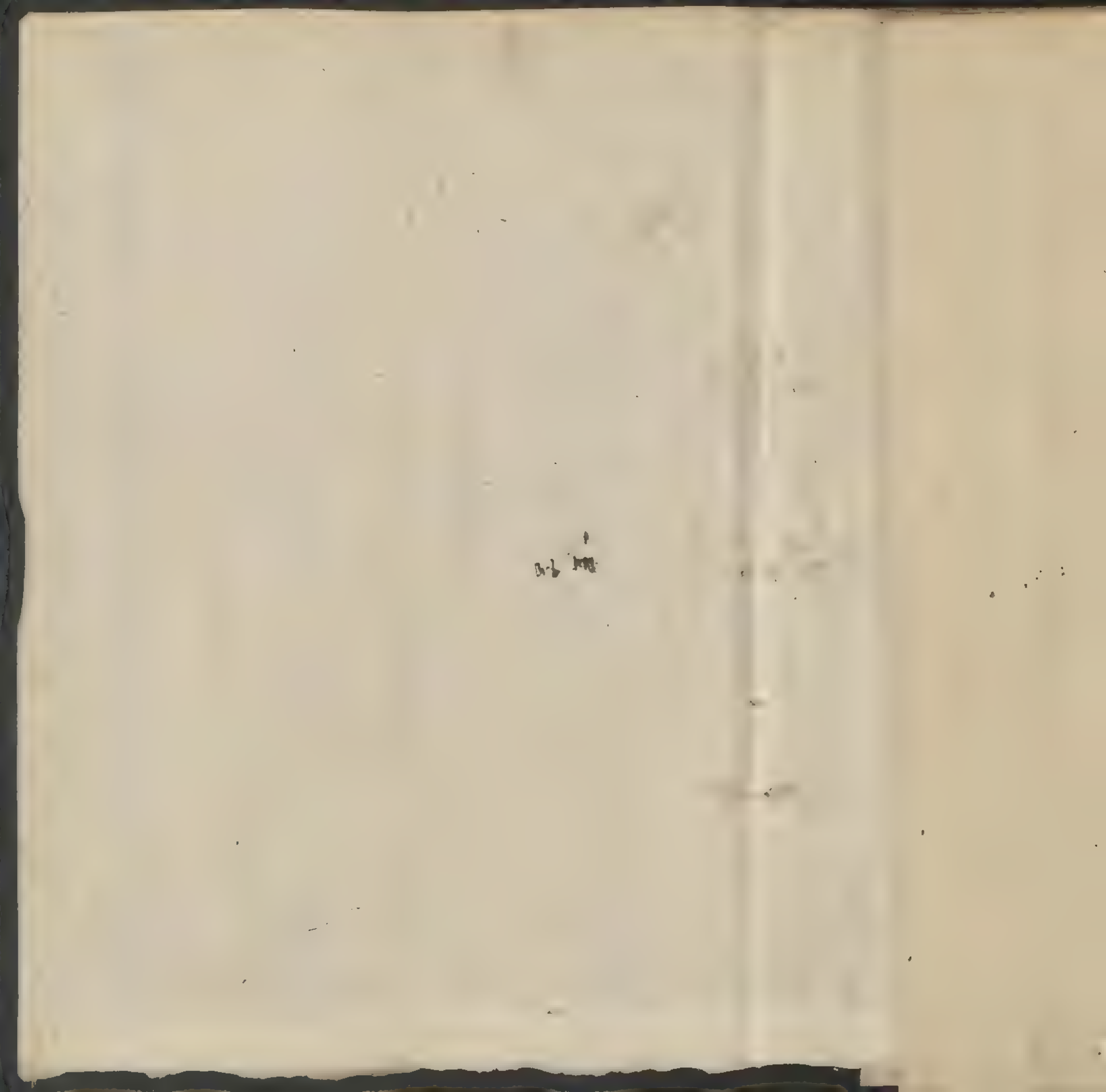

B
Fig. 1.
A
C
D
b
B
Fig. 2.
D
C
A
b


B
Fig. 3.
D
A
b
c


B
E
Fig. 4.
D
G
C
A
F
H


Fig. 5.
C
D
H
E
A
B
F
G


E
A
Fig. 6.
B
C
D



Tab. VI.

Fig. 1.

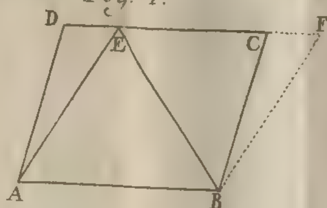


Fig. 2.

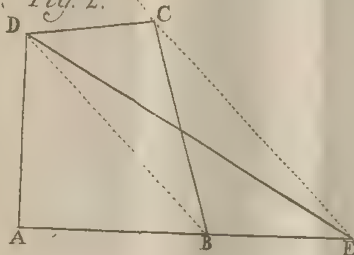


Fig. 3.

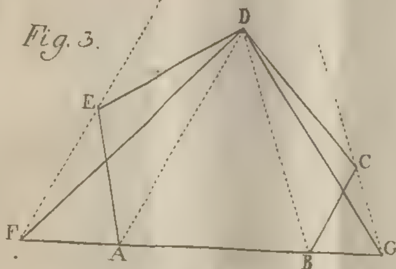


Fig 4.

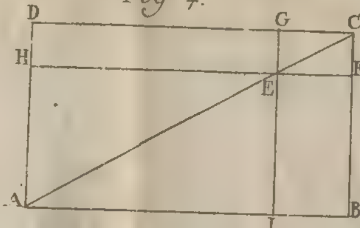


Fig. 5.

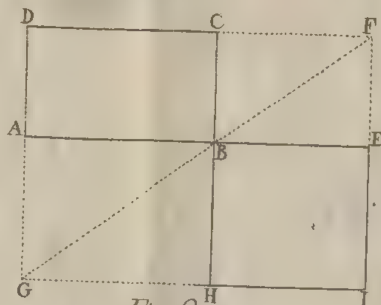
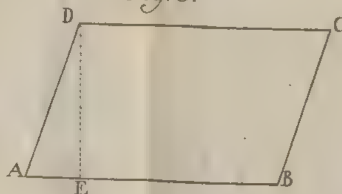
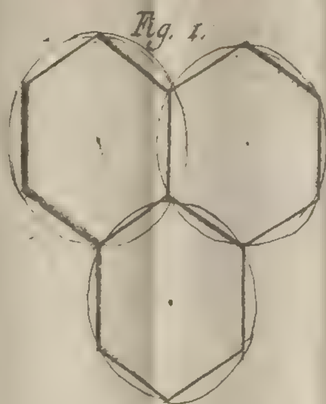


Fig. 6.



Tab. V.


Fig. 1.

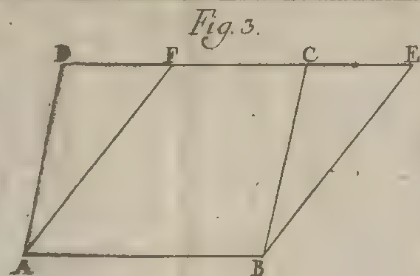


Fig. 3.

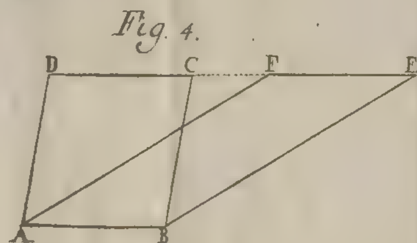


Fig. 4.

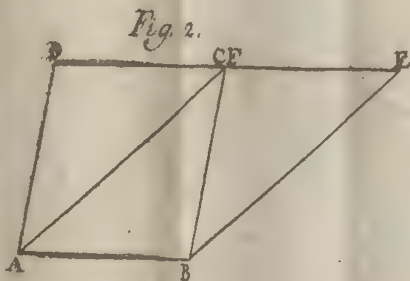


Fig. 2.

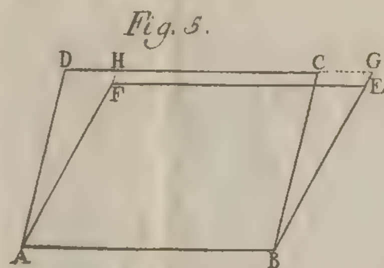


Fig. 5.

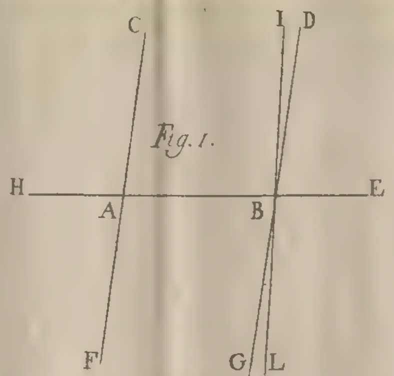


Fig. 1.

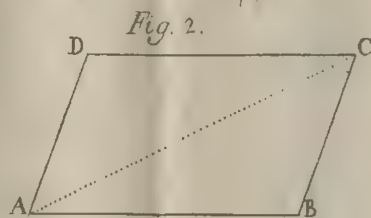


Fig. 2.

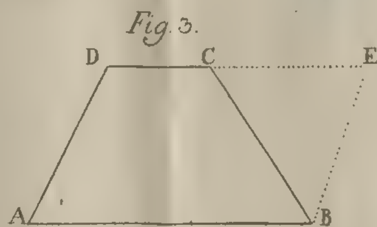


Fig. 3.

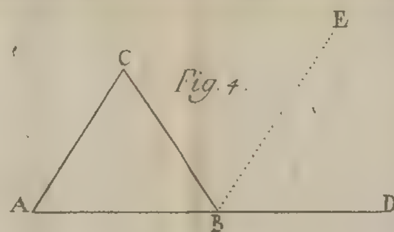
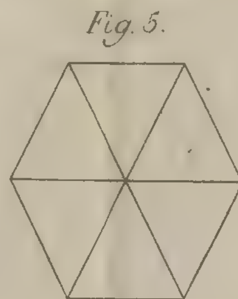
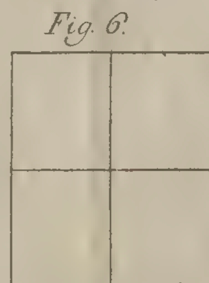
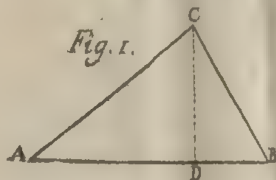
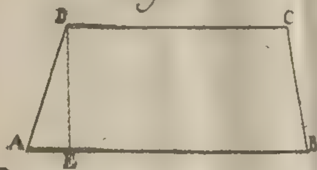


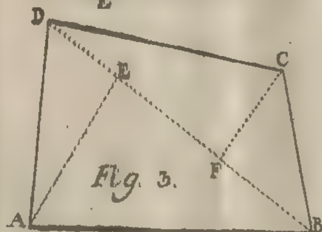
Fig. 4.

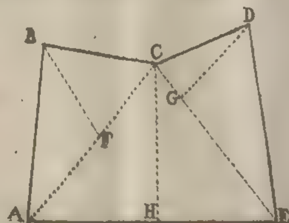

Fig. 5.

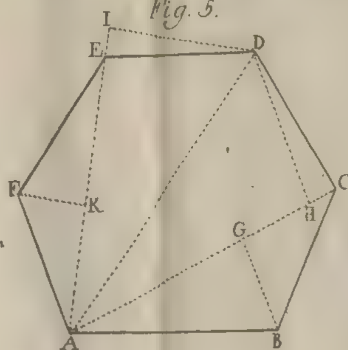

Fig. 6.

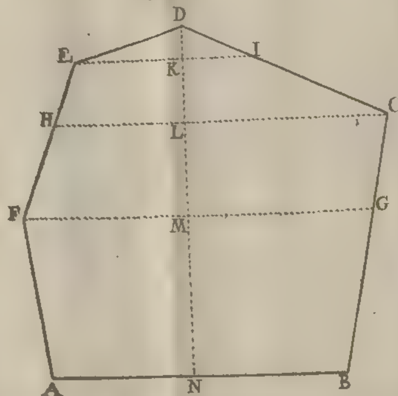

Fig. 1.
C
A
D
B

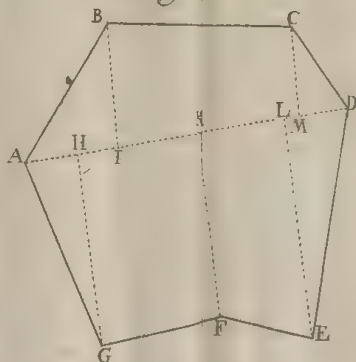

Fig. 2.
D
C
A
E
B

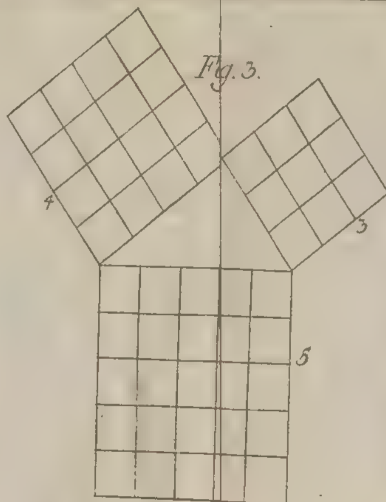

D
C
E
F
Fig. 3.
A
B

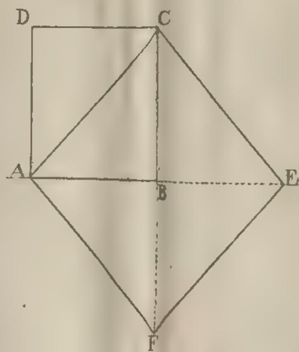

Fig. 4.
B
C
D
G
A
H
E

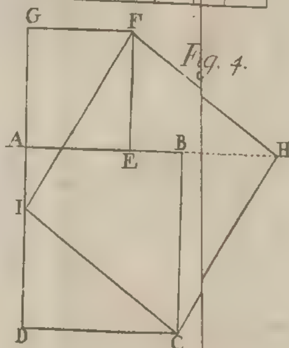

Fig. 5.
I
E
D
F
K
C
H
G
A
B


Fig. 6.
D
E
I
K
H
L
C
F
M
G
A
N
B

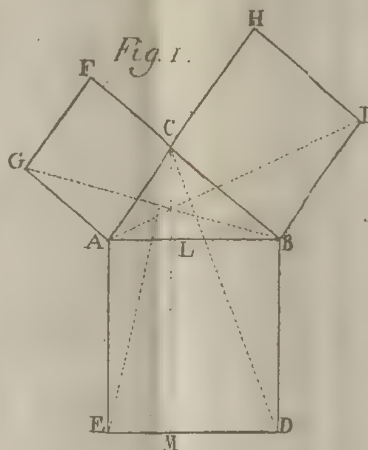

Fig. 1
B
C
D
A
H
I
L
M
F
G
E

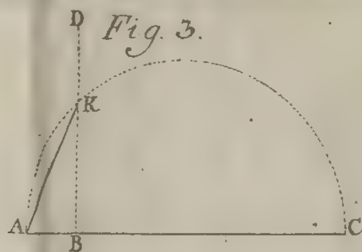

Fig. 3.
4
3
5

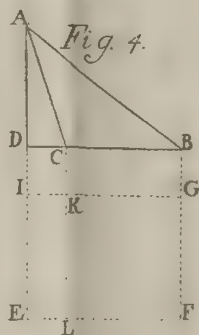

Fig. 2.
D
C
A
B
E
F

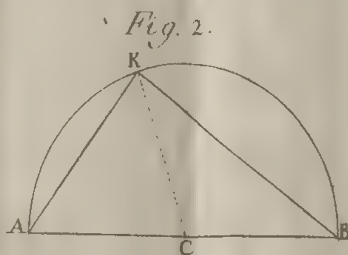

G
F
Fig. 4.
A
E
B
H
I
D
C

Tab. IX.


Fig. 1.
H
F
I
C
G
A
L
B
E
M
D


D
Fig. 3.
K
A
B
C


A
Fig. 4.
D
C
B
I
K
G
E
L
F


Fig. 2.
K
A
C
B

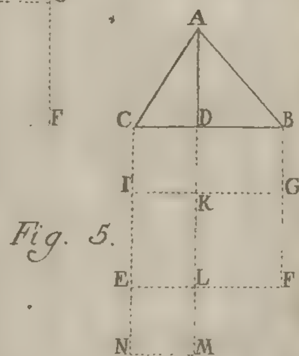

A
C
D
B
I
K
G
Fig. 5.
E
L
F
N
M

Fig. 1.

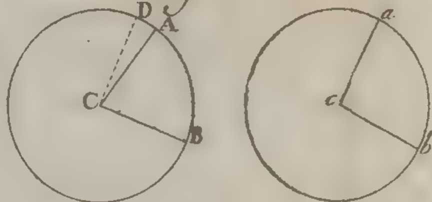


Fig. 2.

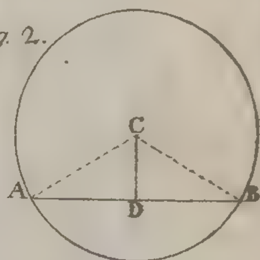


Fig. 3.

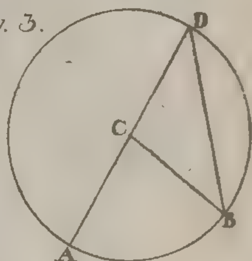


Fig. 4.

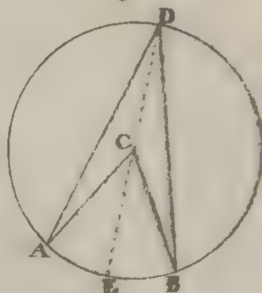


Fig. 5.

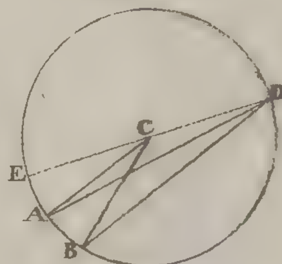
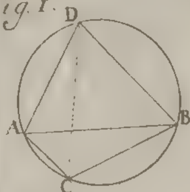
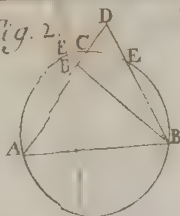
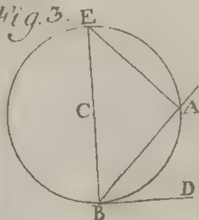


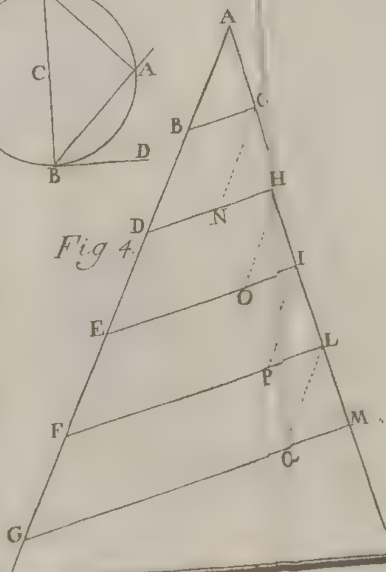
Fig. 6.




Fig. 1.
D
A
B
C


Fig. 2.
D
C
E
A
B


Fig. 3.
E
C
A
B
D


Fig 4.
A
B
C
H
D
N
I
O
E
L
P
F
M
Q
G

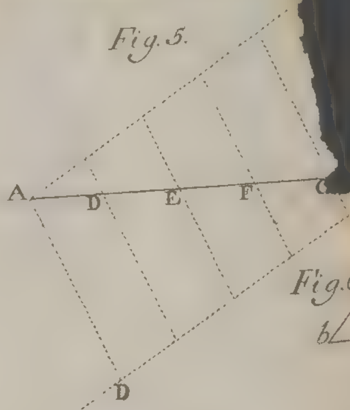
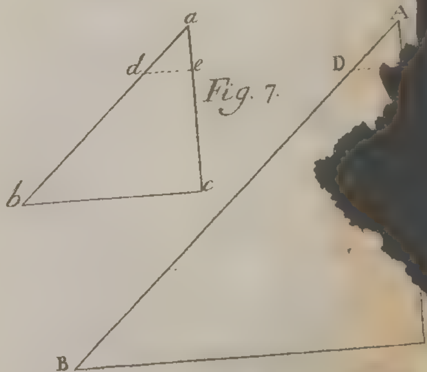
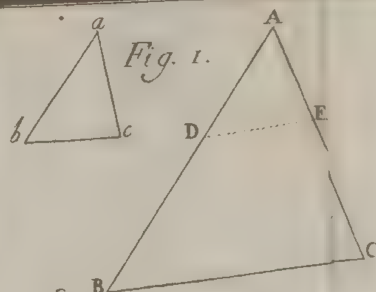
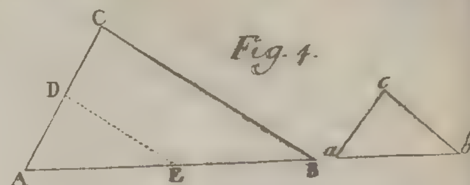
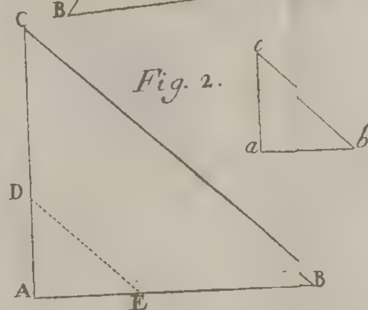

Fig. 5.
A
D
E
F
D

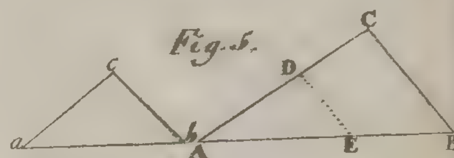

Fig. 6.
b

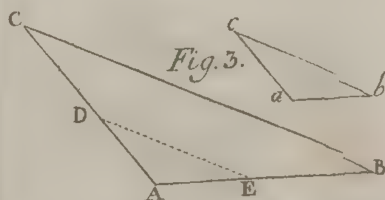

a
d
e
Fig. 7.
b
c
A
D
B

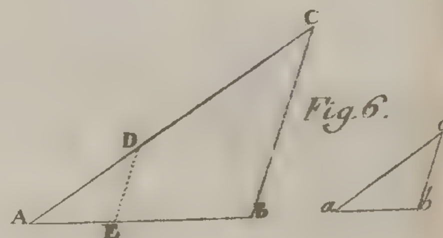

Fig. 1.
a
b
c
A
D
E
B
C

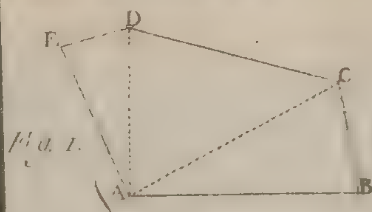

Fig. 4.
C
D
A
E
B
c
a
b

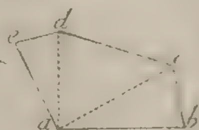

Fig. 2.
C
D
A
E
B
c
a
b

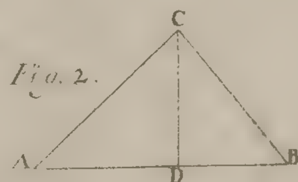

Fig. 5.
c
a
b
A
C
D
E
B

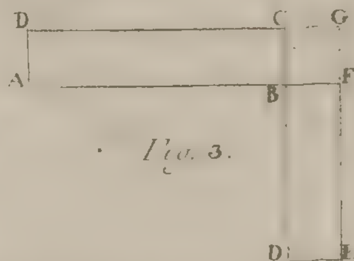

Fig. 3.
C
D
A
E
B
c
a
b

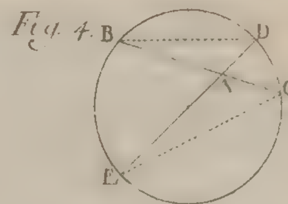

Fig. 6.
C
D
A
E
B
c
a
b

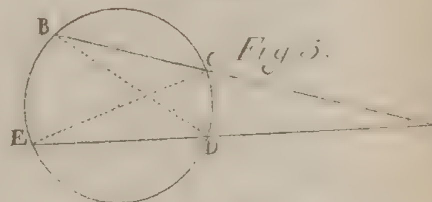

F
D
C
Fig. 1.
A
B

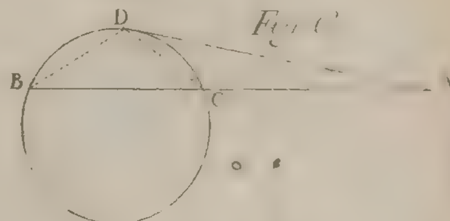

e
d
c
a
b

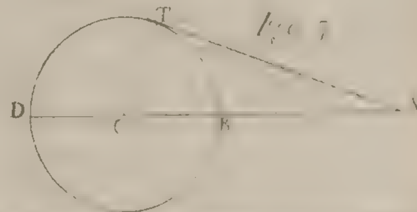

C
Fig. 2.
A
B
D


D
C
G
A
F
B
Fig. 3.
D
E

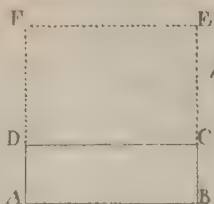

Fig. 4.
B
D
C
E

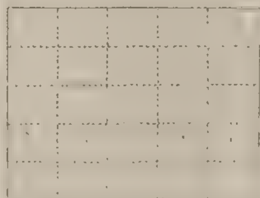

B
C
Fig. 5.
E
D


D
B
C

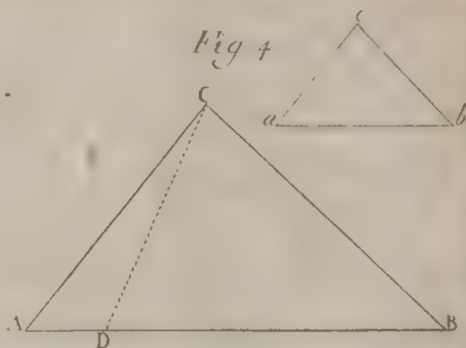

T
D

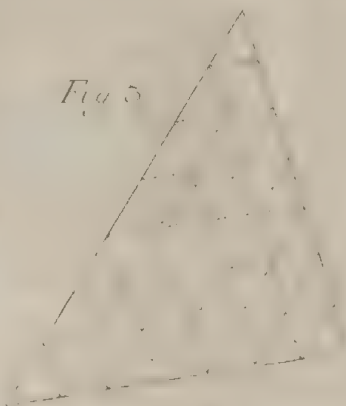
Tab. III.

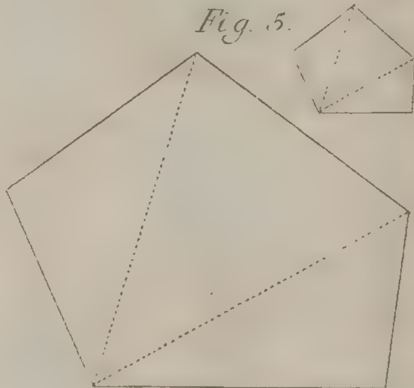


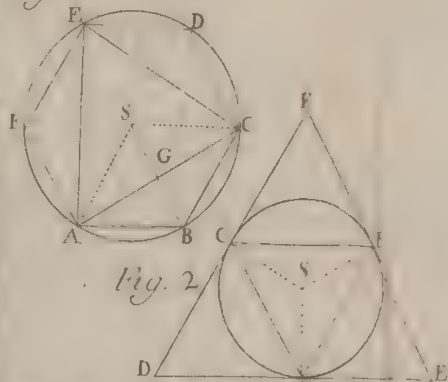


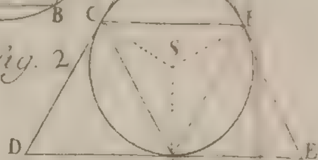


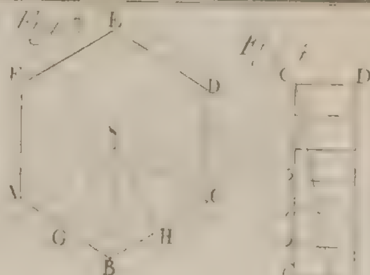


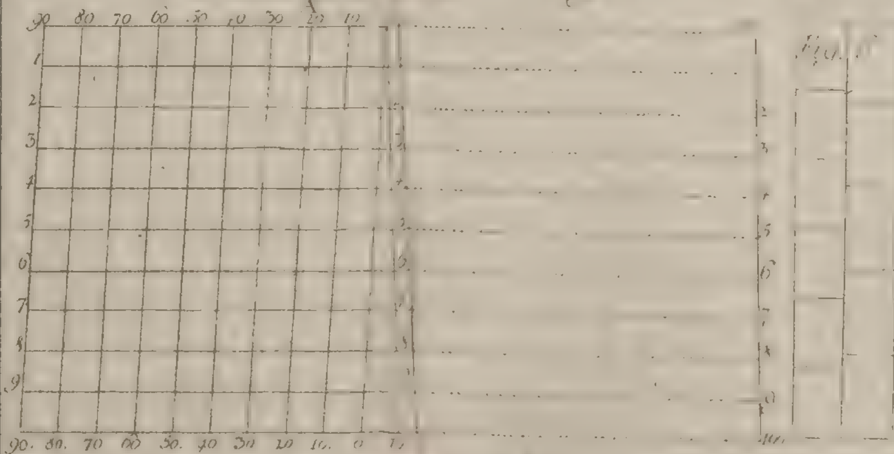


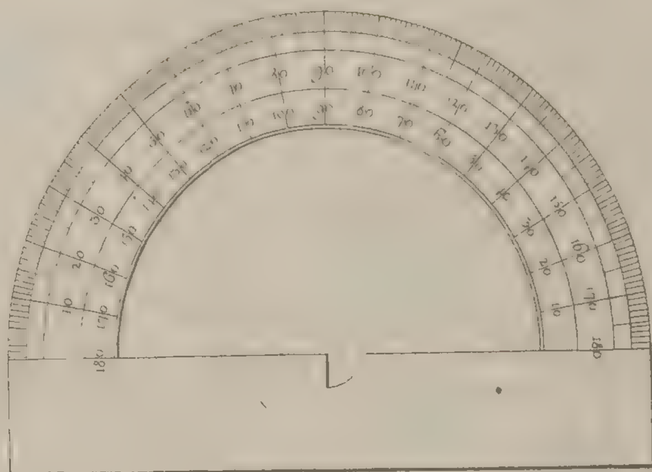



Fig. 1.
F
D
S
C
G
A
B


Fig. 2
F
C
S
D
A
E


E
F
D
G
H
B
C
D
A
B


Fig. 5
90 80 70 60 50 40 30 20 10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
90. 80. 70 60 50. 40 30 20 10. 0



Jan Łukiewicz

Uczeń Klasy 3ciej

Tab. XVII.

Linia częsci rownych.

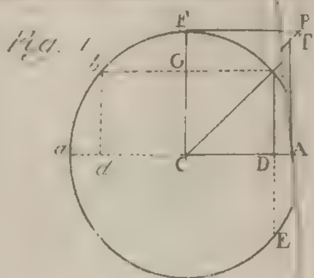
Linia częsci rownych.

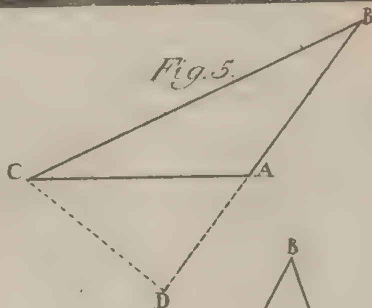
Linia Wielokątow.

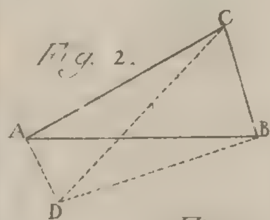
Linia Wielokątow.

Linia Cięciw.

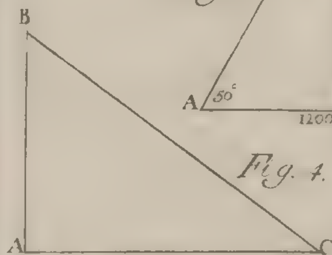
Linia Cięciw.

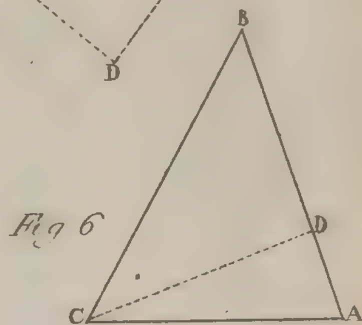

Fig. 1
F
P
T
b
G
a
d
C
D
A
E

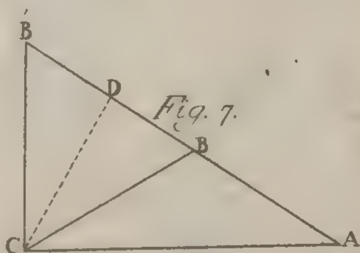

B
Fig. 5.
C
A
D


C
Fig. 2.
A
B
D

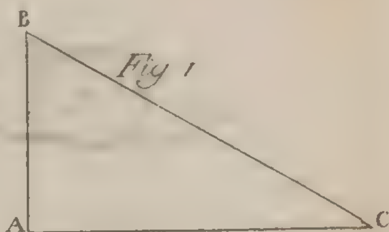

C
Fig. 3.
A
50°
1200
D
B

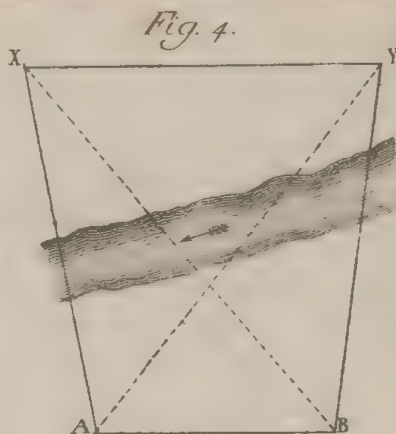

B
Fig. 4.
A
C

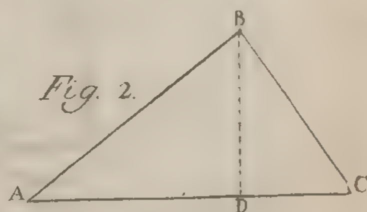

B
Fig 6
D
C
A

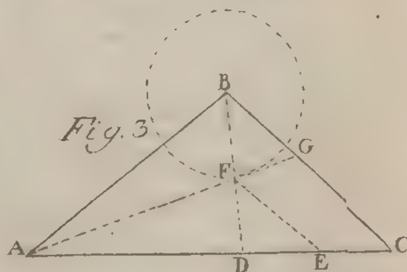

B
D
Fig. 7.
B
C
A

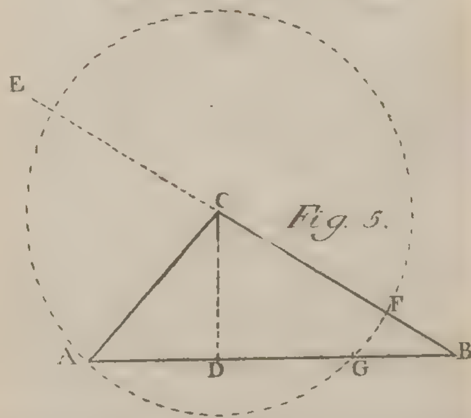
Tab. XIX.

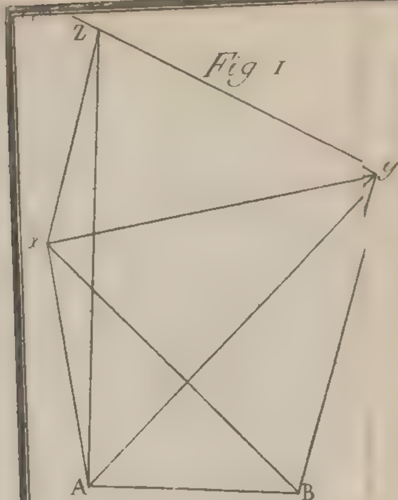


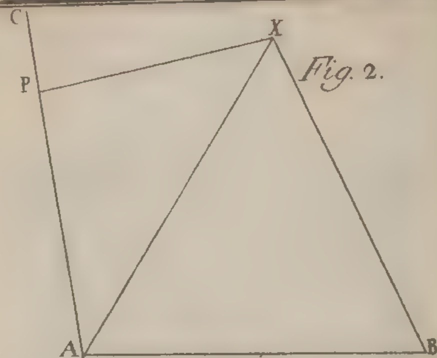


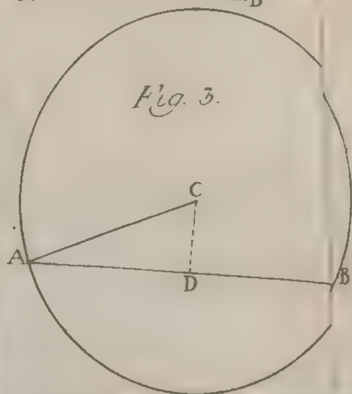


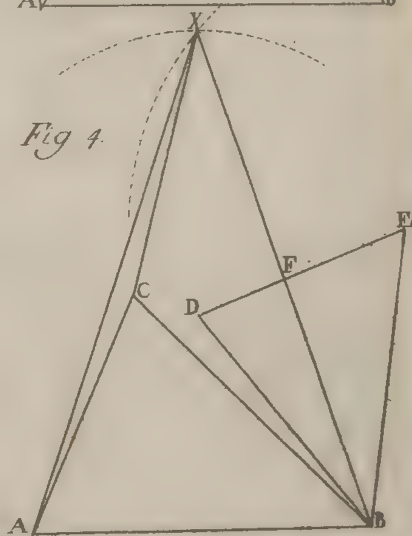


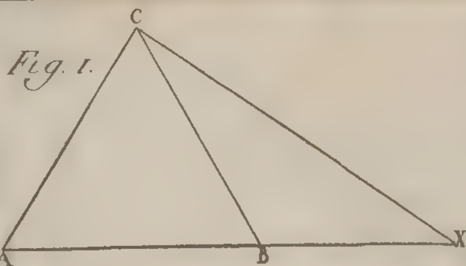


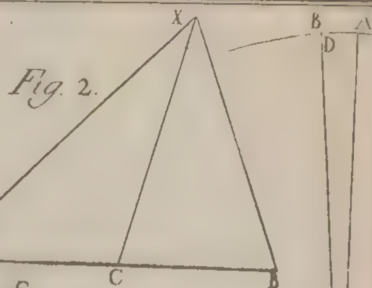

Fig 1
Z
y
x
A
B


Fig. 2.
C
P
X
A
B

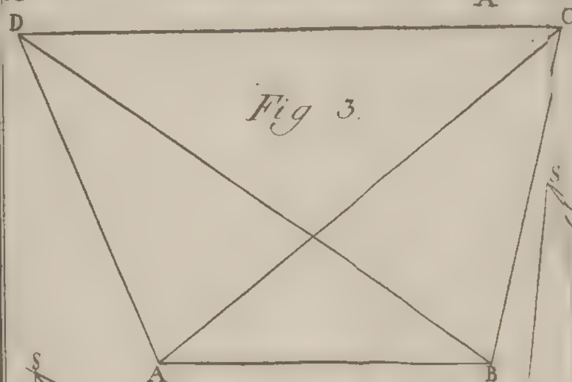

Fig. 3.
C
A
D
B

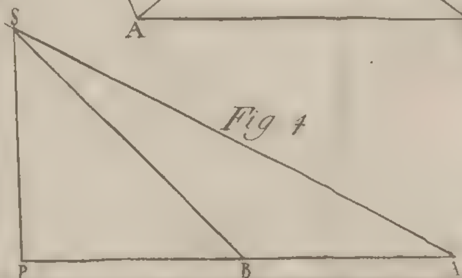

Fig 4.
X
E
F
C
D
A
B

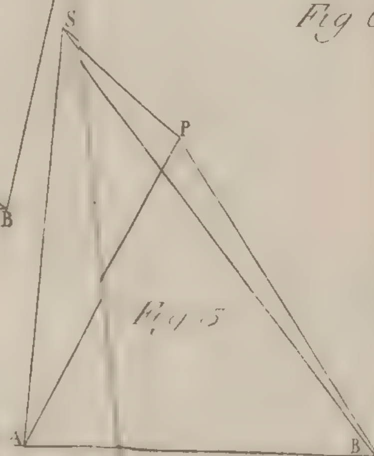

Fig. 1.
C
A
B
X

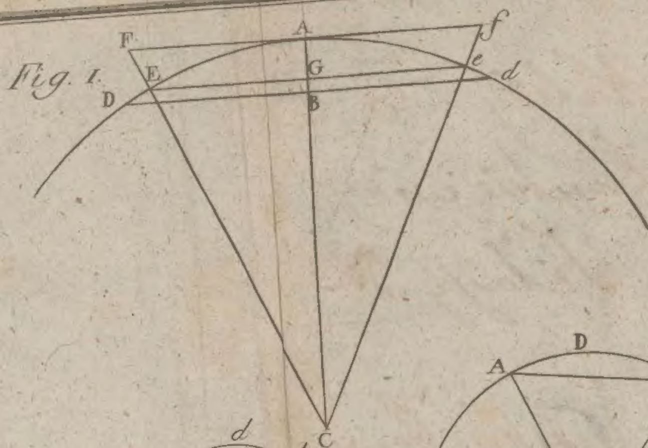

Fig. 2.
X
A
C
B


B
A
D
Fig 6.


Fig 3.
D
C
A
B


S
Fig 4
P
B


S
P
Fig 5
A
B



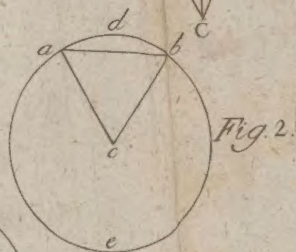
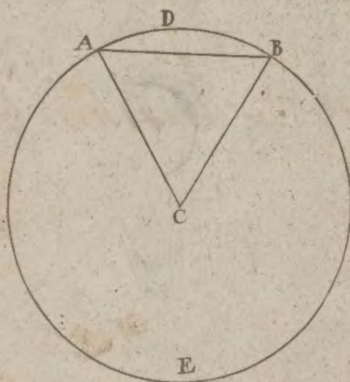
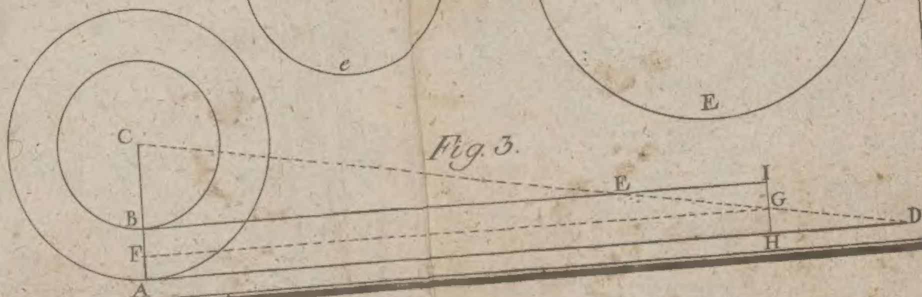


Fig. 2.





Ta
...zka Należy Do
Jana Łunkiewicza
Ucznia Klassy 3ciey
Jan Łunkiewicz
Иван Лункиевичъ

...ван Лункиевичъ
...ченъ Классы Второи

~~$(ax+bx)(2bx-cd)(3bx-da)2bx-2bx-c$~~

~~$(ax+ba)(3bx-da+ax(2bx+2bx-3abx+4ax)$~~

$(ax+bx)(3bx-da+2ba$

$(-2bx+5bx-3abx+4ax)$

